50282

249

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

50282

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

1963 FEB 16.

TOMUS XXIII

FASC. 3—4

SZEGED, 1962

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

23. KÖTET

3—4. FÜZET

SZEGED, 1962

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

50282

EGYETEMI KÖNYVTÁR FOLYÓIRATOK SZEGED

Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Einleitung

W. ORLICZ[1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Es sei $\{\lambda(n)\}$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge, und wir nehmen an, daß sie eine Teilfolge $\{\lambda(n_k)\}$ besitzt, mit den Eigenschaften

$$\log n_{k+1} \leqq c \log n_k \qquad (c>0)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(n_k)} < \infty.$$

Unter der Bedingung

$$\sum a_n^2 \lambda(n) \log^2 n < \infty \tag{1}$$

ist dann die Reihe

$$\sum a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt, d.h. bei jeder Anordnung der Glieder, fast überall konvergent.

In dieser Arbeit werden wir u. a. diesen Satz weitgehend verschärfen[2]).

Wir übereinkommen, immer den Logarithmus mit der Basis 2 zu benutzen. Es wird zur Abkürzung $\nu_k = 2^{2^k}$ gesetzt.

S a t z I. *Unter der Bedingung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{3}$$

ist die Reihe (2) *für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent.*

[1]) W. ORLICZ, Zur Theorie der Orthogonalreihen, *Bulletin Intern. Acad. Sci. Polonaise Cracovie*, **1927**, 81–115.

[2]) Die Sätze I–III und VI wurden in weniger allgemeiner Form und ohne Beweis angekündigt in der Note: K. TANDORI: Sur la convergence inconditionnelle des séries orthogonales, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **253** (1961), 928–929.

Satz II. *Es sei $\{a_n\}$ eine positive, monoton abnehmende Koeffizientenfolge. Ist*

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2\log^2 n\right]^{\frac{1}{2}}=\infty,$$

so gibt es ein im Intervall [0, 1] *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe*

$$(5)\qquad \sum a_n\Phi_n(x)$$

nicht unbedingt konvergiert; genauer: sie divergiert in einer gewissen Anordnung ihrer Glieder in [0, 1] *fast überall.*

Für den Satz II werden wir zwei Beweise angeben; der erste bezieht sich auf den Fall $\sum \sqrt{\nu_k}a_{\nu_k}2^k=\infty$, der zweite auf den allgemeinen Fall. Diese zwei Fälle können auch gemeinsam betrachtet werden, aber der Beweis ist im allgemeinen Fall viel komplizierter.

Aus den Sätzen I und II folgt unmittelbar der

Satz III. *Es sei $\{|a_n|\}$ monoton abnehmend. Damit die Reihe* (2) *für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß die Bedingung* (3) *erfüllt sei.*

Der Satz I enthält also den Satz von W. Orlicz.

Es kann leicht eingesehen werden, daß für monoton abnehmende, positive Folgen $\{|a_n|\}$ die Bedingung (3) mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2\log_+^2\frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}<\infty$$

gleichwertig ist, wobei

$$\log_+ x=\begin{cases}\log x & \text{für } x\geqq 2,\\ 1 & \text{für } 0<x<2\end{cases}$$

bedeutet.

Aus dieser Ungleichung folgt nämlich $\sum a_n^2<\infty$. Wegen der Monotonie von $\{|a_n|\}$ gilt also $a_n^2=o(n^{-1})$ und es besteht

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2\log^2 n\right]^{\frac{1}{2}}=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2\log_+^2\frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Es bezeichne J bzw. J' die Menge der Indizes n, für die $a_n^2\geqq n^{-4}$ bzw. $a_n^2<n^{-4}$ besteht. Dann gelten

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{\substack{\nu_k<n\leqq\nu_{k+1}\\ n\in J}} a_n^2\log_+^2\frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2\log^2 n\right]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{\substack{\nu_k<n\leqq\nu_{k+1}\\ n\in J'}} a_n^2\log_+^2\frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}}\frac{1}{n^2}|a_n|\log_+^2\frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}=O(1)\sum_{k=0}^{\infty}\nu_k^{-\frac{1}{2}}<\infty,$$

woraus auch

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log_+^2 \frac{1}{a_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}}$$

folgt.

Auf Grund dieser Sätze können auch die folgenden Behauptungen leicht eingesehen werden:

Satz IV. *Damit die Orthogonalreihe* (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *unbedingt konvergiert, ist hinreichend, daß für eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge* $\{\lambda(n)\}$ *mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda(\nu_k)} < \infty \tag{6}$$

die Ungleichung (1) *erfüllt wird. Sind die Folgen* $\{a_n^2\}$ *und*

$$A_k = \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

monoton abnehmend, so ist diese Bedingung auch notwendig.

Satz V. *Damit die Orthogonalreihe* (2) *mit nichtverschwindenden, nach* 0 *konvergierenden Koeffizienten für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *unbedingt konvergiert, ist hinreichend, daß für eine positive, monoton wachsende Funktion* $g(x)$ *mit*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{g(x)} < \infty \tag{7}$$

die Ungleichung

$$\sum a_n^2\, g\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) \log^2 \frac{1}{a_n^2} < \infty \tag{8}$$

erfüllt wird. Sind die Folgen a_n^2 *und* $\{A_k\}$ *monoton abnehmend, so ist diese Bedingung auch notwendig.*

Diese Sätze sind Verschärfungen der Sätze von W. Orlicz[3]).

Beweis des Satzes IV. *Hinlänglichkeit* folgt leicht aus (1) und (6) mit Anwendung des Satzes I.

Notwendigkeit. Ist die Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent, so gilt (3) auf Grund des Satzes III. $A_k > 0$ $(k=0, 1, \ldots)$ kann angenommen werden. Es sei $\lambda(n) = A_k^{-1}$ $(\nu_k < n \leqq \nu_{k+1};\ k=0, 1, \ldots)$ und $\lambda(n) = \lambda(3)$ für $n=1, 2$. Diese Folge erfüllt die Bedingungen des Satzes IV und mit ihr besteht (1).

Damit haben wir den Satz IV bewiesen.

---

[3]) S. loc. cit. [1]).

B e w e i s d e s S a t z e s V. *Hinlänglichkeit.* Monotonität $a_n^2 \geqq a_{n+1}^2$ $(n=1, 2, \ldots)$ kann angenommen werden. Da aus (8) $\sum a_n^2 < \infty$ folgt, so ist $a_n^2 = o(n^{-1})$. Aus (8) ergibt sich

$$\sum a_n^2\, g(\log\log n) \log^2 n < \infty, \tag{9}$$

d. h. (1) ist mit $\lambda(n) = g(\log\log n)$ erfüllt; diese Folge $\{\lambda(n)\}$ ist positiv, monoton wachsend, und wegen (7) genügt sie der Ungleichung (6). Aus (9) folgt leicht die Ungleichung (3), welche dann die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ sichert.

Notwendigkeit. Ist die Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ unbedingt konvergent, so gilt (3). Es sei $g(x) = \min\{k^2, A_k^{-1}\}$ $(k+2 < x \leqq \leqq k+3;\ k=0, 1, \ldots)$; diese Funktion ist positiv, monoton wachsend, und genügt den Bedingungen (7) und $g(x) \leqq x^2$. Aus (3) ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\sum a_n^2\, g(\log\log n + 2) \log^2 n < \infty. \tag{10}$$

I bzw. I' bezeichne die Menge der Indizes n mit $a_n^2 \geqq n^{-4}$ bzw. $a_n^2 < n^{-4}$. Dann ist

$$\sum_{n\in I} a_n^2\, g\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) \log^2 \frac{1}{a_n^2} = O(1) \sum a_n^2\, g(\log\log n^4) \log^2 n < \infty \tag{11}$$

und

$$\sum_{n\in I'} a_n^2\, g\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) \log^2 \frac{1}{a_n^2} \leqq \sum \frac{1}{n^2} |a_n| \left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right)^2 \log^2 \frac{1}{a_n^2} = \tag{12}$$
$$= O(1) \sum n^{-2} < \infty.$$

Aus (11) und (12) folgt (8) auf Grund von (10).

Damit ist Satz V bewiesen.

Durch Anwendung des Satzes II können auch die folgenden Behauptungen leicht bewiesen werden.

S a t z VI. *Es sei $\{\bar\lambda(n)\}$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\bar\lambda(\nu_k)} = \infty. \tag{13}$$

Dann gibt es eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein in [0, 1] *orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Bedingung*

$$\sum a_n^2 \bar\lambda^2(n) \log^2 n < \infty \tag{14}$$

erfüllt wird, jedoch die Orthogonalreihe (5) *nicht unbedingt konvergiert.*

S a t z VII. *Es sei $\bar g(x)$ eine positive, monoton wachsende Funktion mit*

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\bar g(x)} = \infty. \tag{15}$$

Dann gibt es eine positive, monoton nach 0 strebende Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Bedingung

$$(16) \qquad \sum a_n^2 \, \bar{g}\left(\log\log\frac{1}{a_n^2}\right)\log^2\frac{1}{a_n^2} < \infty$$

erfüllt ist, jedoch die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert.

Der Satz VI bzw. VII gibt eine Antwort auf ein Problem von G. ALEXITS[4]) und N. N. WOLKOW—P. L. ULJANOW[5]) bzw. G. ALEXITS[6]).

Beweis des Satzes VI. Wegen (13) ergibt sich durch Anwendung eines bekannten Satzes die Existenz einer positiven, monoton wachsenden Folge $\{\mu(k)\}$ mit

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(k)} < \infty$$

und

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}(\nu_k)\,\mu(k)}} = \infty.$$

Es sei

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{(\nu_{k+1}-\nu_k)\bar{\lambda}(\nu_{k+1})\,\mu(k+1)2^{k+1}}} \qquad (\nu_k < n \leqq \nu_{k+1};\ k=0, 1, \ldots)$$

bzw. $a_n = a_3$ für $n=1, 2$. Aus (18) ergibt sich (4) leicht und durch Anwendung des Satzes II folgt die Existenz eines in $[0, 1]$ orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Aus (17) erhält man ferner, daß (14) besteht.

Damit ist Satz VI bewiesen.

Beweis des Satzes VII. Auf Grund von (15) kann leicht eine positive, monoton wachsende Funktion $\bar{\bar{g}}(x)$ mit $\bar{\bar{g}}(x) \geqq \bar{g}(x)$ und

$$(19) \qquad \int_1^{\infty}\frac{dx}{\bar{\bar{g}}(x)} = \infty$$

angegeben werden, für die die Bedingung $\bar{\bar{g}}(x) \leqq 2\bar{\bar{g}}(k)$ $(k \leqq x \leqq k+\frac{1}{2};\ k=1, 2, \ldots)$ erfüllt ist. Bezeichnen wir mit $k_1 < \ldots < k_i < \ldots$ sämtliche natürliche Zahlen mit $\bar{\bar{g}}(k_i) \leqq k_i^2$ $(i=1, 2, \ldots)$. Wegen (19) gilt

$$\sum \frac{1}{\bar{\bar{g}}(k_i)} = \infty,$$

---

[4]) G. ALEXITS, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen* (Budapest, 1960), 100.

[5]) И. И. ВОЛКОВ—П. Л. УЛЯНОВ, Обзорная статя, Anhang zur russischen Ausgabe des Buches: R. G. COOKE, *Infinite matrices and sequence spaces* (Moskau, 1960), 452—453.

[6]) S. loc. cit. [4]).

woraus die Existenz einer positiven, monoton wachsenden Folge $\{\varkappa(i)\}$ mit

$$\sum \frac{1}{\varkappa(i)} < \infty \quad \text{und} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{g}}(k_i)\,\varkappa(i)}} = \infty$$

folgt. Es sei $\bar{\varkappa}(i) = \min(i^3, \varkappa(i))$; diese Folge ist positiv, monoton wachsend, weiterhin gelten die Beziehungen

$$(20)\quad \sum \frac{1}{\bar{\varkappa}(i)} < \infty \qquad \text{und} \qquad (21)\quad \sum \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{g}}(k_i)\,\bar{\varkappa}(i)}} = \infty.$$

Es sei

$$a_n = [(\nu_{k_{i+1}} - \nu_{k_i})\bar{\bar{g}}(k_{i+1})\bar{\varkappa}(i+1)]^{-\frac{1}{2}} 2^{-k_{i+1}} \qquad (\nu_{k_i} < n \leqq \nu_{k_{i+1}};\ i = 1, 2, \ldots)$$

bzw. $a_n = a_{\nu_{k_1}+1}$ $(n = 1, \ldots, \nu_{k_1})$. Dann ist wegen (21)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_{k_i}+1}^{\nu_{k_{i+1}}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\log^2 \nu_{k_{i+1}} \sum_{n=2^{-1}\nu_{k_i}+1}^{\nu_{k_{i+1}}} a_n^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\bar{\bar{g}}(k_{i+1})\,\bar{\varkappa}(i+1)}} = \infty.$$

Daraus ergibt sich auf Grund des Satzes II die Existenz eines in $[0, 1]$ orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Da infolge unserer Annahme über $\bar{\varkappa}(i)$ und $\bar{\bar{g}}(x)$ für genügend große i

$$\log\log \frac{1}{a_n^2} \leqq k_{i+1} + \frac{1}{2} \qquad (\nu_{k_i} < n \leqq \nu_{k_{i+1}})$$

ist, so gilt auf Grund von (20)

$$\sum a_n^2 \bar{g}\left(\log\log \frac{1}{a_n^2}\right) \log^2 \frac{1}{a_n^2} = O(1) \sum \frac{1}{\bar{\varkappa}(i)} < \infty,$$

d. h. (16) ist erfüllt.

Damit haben wir den Satz VII bewiesen.

Es sei z. B.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\nu_{k+1} - \nu_k}\, 2^{k+1}(k+1)} \qquad (\nu_k < n \leqq \nu_{k+1};\ k = 0, 1, \ldots)$$

und $a_n = a_3$ $(n = 1, 2)$. Es besteht offensichtlich (4) und

$$(22) \qquad \sum' a_n^2 \log^2 n < \infty.$$

Aus Satz II ergibt sich die Existenz eines in $[0, 1]$ orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Reihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Es sei $\{m_k\}$ eine beliebige, im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge. Aus (22) folgt

$$\sum a_{m_k}^2 \log^2 k < \infty.$$

Aus dem wohlbekannten Satz von D. MENCHOFF[7]) und H. RADEMACHER[8]) ergibt sich daraus, daß die Reihe

$$\sum a_{n_k}\Phi_{n_k}(x)$$

fast überall konvergiert. Damit haben wir die folgende Behauptung bewiesen:

Satz VIII. *Es gibt eine Orthogonalreihe* $\sum a_n\varphi_n(x)$, *mit* $\sum a_n^2 \log^2 n < \infty$, *deren jede Teilreihe fast überall konvergiert, die selbst jedoch nicht unbedingt konvergiert.*

Ein ähnliches Resultat für gleichmäßig beschränkte orthonormierte Systeme, aber ohne Bedingung (22), hat das erste Mal – auf einem anderen Weg – P. L. ULJANOW[9]) erhalten.

Wir werden noch zwei Sätze beweisen:

Satz IX. *Es sei* $\{\lambda(n)\}$ *eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge mit* (6) *und* $\{|a_{n_m}|\}$ *bezeichne die in abnehmende Anordnung gestellte Folge der absoluten Werte der nicht-verschwindenden Koeffizienten von* (2). *Ist*

$$(2>)\alpha_m \geqq \frac{4\log\log m + 2\log\lambda(m)}{\log m} \qquad (m \geqq m_0), \tag{23}$$

so folgt aus

$$\sum |a_{n_m}|^{2-\alpha_m} < \infty \tag{24}$$

die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$.

Satz X. *Es sei* $\bar\lambda(n) = \log\log n$. *Dann gibt es eine Orthogonalreihe* (5) *mit positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizienten derart, daß sie nicht unbedingt konvergiert, jedoch*

$$\sum a_n^{2-\bar\alpha_n} < \infty$$

mit

$$\bar\alpha_n = \frac{4\log\log n + 2\log\bar\lambda(n)}{\log n} \qquad (n \geqq n_0)$$

besteht.

Satz IX ist die Verschärfung eines Satzes von G. ALEXITS[10]) und Satz X zeigt, daß die Behauptung des Satzes IX ohne die Bedingung (6) im allgemeinen nicht richtig ist. Der Satz X, der wahrscheinlich sogar für eine beliebige positive, monoton wachsende und die Bedingung (6) nicht erfüllende Folge $\{\lambda(n)\}$ gilt, gibt eine negative Antwort auf ein Problem von G. ALEXITS[11]), ob (24) mit $\alpha_m = \dfrac{4\log\log m}{\log m}$ hinreicht, damit die Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System unbedingt konvergiert.

---

[7]) D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie). *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82–105.

[8]) H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112–138.

[9]) П. Л. Улянов, Расходящиеся ряды Фурье класса L^p ($p \geqq 2$). Доклады акад. наук СССР, **137** (1961), 786–789.

[10]) S. loc. cit. [4]), 97–98.

[11]) S. loc. cit. [4]), 100.

B e w e i s d e s S a t z e s IX. Wegen (24) ist

$$\sum a_{n_m}^2 < \infty.$$

Daraus folgt auf Grund der Monotonie von $\{a_{n_m}^2\}$ für alle genügend große Indizes m

$$\log \frac{1}{a_{n_m}^2} \geqq \log m.$$

Durch einfache Rechnung mithin ergibt sich aus (23)

$$\alpha_m \geqq \frac{4 \log\log m + 2 \log \lambda(m)}{\log \frac{1}{a_{n_m}^2}},$$

also

$$|a_{n_m}|^{-\alpha_m} \geqq \lambda(m) \log^2 m$$

für genügend große m. Daraus und aus (24) folgt

$$\sum a_{n_m}^2 \lambda(m) \log^2 m < \infty.$$

Auf Grund von (6) ergibt sich mit Anwendung des Satzes IV die Behauptung des Satzes IX.

B e w e i s d e s S a t z e s X. Es sei z. B.

$$a_n = \left(n(\log n)^{3+8\frac{\log\log n}{\log n}} (\log\log n)^{2+4\frac{\log\log n}{\log n}}\right)^{-\frac{1}{2}} (\log\log\log n)^{-1} \qquad (n \geqq N)$$

bzw. $a_n = a_N$ $(n = 1, \ldots, N-1)$, wo N so gewählt ist, daß diese Folge $\{a_n\}$ monoton abnehmend ausfällt. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} \geqq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} (2^{2k+2}(k+1))^{-2 2^{-k}(k+1)} \geqq$$

$$\geqq c_2 \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l \log l} = \infty.$$

Aus Satz II ergibt sich die Existenz eines in $[0, 1]$ orthonormierten Systems $\{\Phi_n(x)\}$ derart, daß die Orthogonalreihe (5) nicht unbedingt konvergiert. Für genügend große n gilt aber

$$\log a_n^{-\bar{\alpha}_n} = \frac{\bar{\alpha}_n}{2} \log \frac{1}{a_n^2} =$$

$$= \frac{2 \log\log n + \log \bar{\lambda}(n)}{\log n} \left(\log n + \left(3 + 8 \frac{\log\log n}{\log n}\right) \log\log n + \right.$$

$$\left. + \left(2 + 4 \frac{\log\log n}{\log n}\right) \log\log\log n + 2 \log\log\log\log n\right) \leqq$$

$$\leqq \log((\log n)^2 \log\log n) \cdot \left(1 + 4 \frac{\log\log n}{\log n}\right)$$

und somit

$$a_n^{-\bar{\alpha}_n} \leqq (\log n)^{2+8\frac{\log\log n}{\log n}} (\log\log n)^{1+4\frac{\log\log n}{\log n}}.$$

Nach der Definition von a_n ergibt sich daraus

$$\sum a_n^{2-\bar{\alpha}_n} = \sum \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)^2} < \infty.$$

Damit ist Satz X bewiesen.

Es bleibt die Frage übrig, ob die Behauptung des Satzes II auch mit einem gleichmäßig beschränkten orthonormierten Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ richtig ist.

§ 1. Beweis des Satzes I

Zum Beweis des Satzes I brauchen wir die Grundidee von W. ORLICZ anzuwenden. Es sei

$$\sum a_{n_l}\varphi_{n_l}(x) \tag{1.1}$$

eine beliebige Anordnung der Reihe (2). Für eine natürliche Zahl k besteht

$$\nu_k < n_l \leqq \nu_{k+1}$$

für $\nu_{k+1}-\nu_k$ verschiedene Indizes l, diese seien der Reihe nach $l(1,k) < l(2,k) < \dots$ $\dots < l(\nu_{k+1}-\nu_k, k)$. Nach einem bekannten Satz[12]) gibt es für jedes k eine positive Funktion $\delta_k(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\left|\sum_{i=p}^{q} a_{n_{l(i,k)}}\varphi_{n_{l(i,k)}}(x)\right| \leqq \delta_k(x) \qquad (1 \leqq p < q \leqq \nu_{k+1}-\nu_k) \tag{1.2}$$

in $[a, b]$ und

$$\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx \leqq A(2^{k+1})^2 \sum_{i=1}^{\nu_{k+1}-\nu_k} a^2_{n_{l(i,k)}} \leqq 4A \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n, \tag{1.3}$$

wo A eine von k und $\{\varphi_n(x)\}$ unabhängige, positive Konstante ist. Aus (3) und (1. 3) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \delta_k(x)\,dx \leqq (b-a)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b \delta_k^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq 2(A(b-a))^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log^2 n\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

[12]) S. z. B. loc. cit. [7]) und [8]).

Daraus ergibt sich durch Anwendung des Satzes von B. LEVI

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(x) < \infty \tag{1.4}$$

fast überall in $[a, b]$. Es sei x ein Punkt, wo (1. 4) erfüllt ist und ε eine beliebige positive Zahl. Dann gibt es einen Index N derart, daß

$$\sum_{k=N}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon \tag{1.5}$$

ist. Wir wählen nun einen Index M so, daß $n_l > \nu_N$ für $l > M$ erfüllt ist. Für $M < p < q$ erhalten wir dann aus (1. 2) und (1. 5):

$$\left| \sum_{l=p}^{q} a_{n_l} \varphi_{n_l}(x) \right| \leqq \sum_{k=N}^{\infty} \delta_k(x) < \varepsilon.$$

Die Reihe (1. 1) ist also im Punkt x konvergent.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

§ 2. Hilfssätze für den Beweis des Satzes II im Falle $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\nu_k} a_{\nu_k} 2^k = \infty$

Hilfsatz I. *Es sei $p(\geq 8)$ eine gerade Zahl. Es läßt sich ein im Intervall $[0, 5]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen*[13] $g_l(p; x)$ $(l = 1, \ldots, 2p)$ *mit folgenden Eigenschaften angeben: Zu jedem Intervall* $\delta_k^{(p)} = ((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(k = 3.2^{-1}p + 1, \ldots, 5.2^{-1}p)$ *gibt es von k abhängige natürliche Zahlen* $m_1(k)$ *bzw.* $m_2(k)$ *derart, daß die Funktionswerte* $g_{2l+1}(p; x)$ $(l = 0, \ldots, m_1(k))$ *für* $x \in \delta_k^{(p)}$ *positiv bzw. die Funktionswerte* $g_{2l}(p; x)$ $(l = m_2(k), \ldots, p)$ *für* $x \in \delta_k^{(p)}$ *negativ sind und*

$$\sum_{l=0}^{m_1(k)} g_{2l+1}(p; x) \geqq B\sqrt{p} \log p \tag{2.1}$$

bzw.

$$\sum_{l=m_2(k)}^{p} g_{2l}(p; x) \leqq -B\sqrt{p} \log p \tag{2.2}$$

gilt, wo A eine von k und p unabhängige, positive Konstante bedeutet. Weiterhin ist jede Funktion $g_l(p; x)$ *in jedem Intervall* $\delta_k^{(p)}$ *konstant.*

Dieser Hilfssatz ist eine Verfeinerung eines Satzes von D. MENCHOFF[14]), dessen Beweis von S. KACZMARZ[15]) vereinfacht wurde.

---

[13]) Eine Funktion in (a, b) heißt eine Treppenfunktion, wenn (a, b) in endlichviele Teilintervalle zerlegt werden kann, derart, daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist.

[14]) S. z. B. loc. cit. [7]).

[15]) S. KACZMARZ, Notes on orthogonal series. II, *Studia Math.*, 5 (1934), 103—106.

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s I. Es sei

$$\bar{g}_l(p;x)=\frac{1}{k-p-l-1/2} \quad \text{für} \quad x\in\left[\frac{k-1}{p},\frac{k}{p}\right) \qquad (k=1,\dots,4p;\ l=1,\dots,2p).$$

Dann ist

$$\int_0^4 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx=\sum_{k=1}^{4p}\frac{1}{(k-p-l-1/2)^2}\,\frac{1}{p},$$

woraus

$$\int_0^4 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx\leqq\frac{A_1}{p} \qquad (l=1,\dots,2p) \tag{2.3}$$

folgt, wo A eine von p unabhängige positive Zahl ist.

Ferner erhalten wir durch einfache Rechnung für $i>j$:

$$\alpha_{i,j}=\int_0^4 \bar{g}_i(p;x)\bar{g}_j(p;x)\,dx=\frac{1}{p(i-j)}\left(\sum_{k=1-p-i}^{3p-i}\frac{1}{k-1/2}-\sum_{k=1-p-j}^{3p-j}\frac{1}{k-1/2}\right);$$

somit ist

$$|\alpha_{i,j}|\leqq\frac{2}{p^2} \qquad (i\neq j). \tag{2.4}$$

Um von den im Intervall [0, 4) auf diese Weise definierten Funktionen $\bar{g}_l(p;x)$ ein im Intervall [0,5] orthogonales Funktionensystem zu erhalten, erweitern wir diese Funktionen auf das Intervall [4, 5] wie folgt: Wir teilen das Intervall [4, 5] in $N=2p(2p-1)$ Teilintervalle gleicher Länge $I_{i,j}$ ein ($1\leqq i\leqq 2p$, $1\leqq j\leqq 2p$, $i\neq j$). Es sei für $l=1,\dots,2p$

$$\bar{g}_l(p;x)=\begin{cases}\left[\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|\right]^{\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x\in I_{l,j},\\ -\left[\frac{1}{2}N|\alpha_{l,j}|\right]^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}\alpha_{l,j} & \text{für} \quad x\in I_{j,l},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die so definierten Treppenfunktionen $\bar{g}_l(p;x)$ bilden offensichtlich ein orthogonales System im Intervall [0, 5], ferner ist

$$\int_0^5 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx=\int_0^4 \bar{g}_l^2(p;x)\,dx+\sum_{n=1}^{l-1}|\alpha_{l,n}|+\sum_{n=l+1}^{2p}|\alpha_{l,n}|.$$

Hieraus folgt auf Grund von (2.3) und (2. 4)

$$\int_0^5 \bar{g}_l^2(p;\, x)\, dx \leqq \frac{A_2}{p} \qquad (l=1, \ldots, 2p), \tag{2.5}$$

wo A_2 eine von p unabhängige positive Zahl ist.

Ist $x \in \delta_k^{(p)}$ $(3.2^{-1}p<k \leqq 5.2^{-1}p)$, so bezeichne $m_1(k)$ die größte natürliche Zahl, für die $2m_1(k)+1 \leqq k-p-1$, und $m_2(k)$ die kleinste natürliche Zahl, für die $k-p \leqq 2m_2(k)$ besteht. Nach der Definition von $\bar{g}_l(p;\, x)$ sind die Funktionswerte $\bar{g}_{2l+1}(p;\, x)$ $(l=0, \ldots, m_1(k))$ positiv bzw. die Funktionswerte $\bar{g}_{2l}(p;\, x)$ $(l=m_2(k), \ldots, p)$ negativ und es gilt

$$\sum_{l=0}^{m_1(k)} \bar{g}_{2l+1}(p;\, x) = \sum_{l=0}^{m_1(k)} \frac{1}{k-p-2l-1-1/2} \geqq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m_1(k)} \frac{1}{l} \geqq A_3 \log p$$

bzw.

$$\sum_{l=m_2(k)}^{p} \bar{g}_{2l}(p;\, x) = \sum_{l=m_2(k)}^{p} \frac{1}{k-p-2l-1/2} \leqq -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{p-m_2(k)} \frac{1}{l} \leqq -A_3 \log p,$$

wo A_3 eine von p und k unabhängige, positive Konstante bedeutet. Für die normierten Funktionen

$$g_l(p;\, x) = \bar{g}_l(p;\, x) \left\{ \int_0^5 \bar{g}_l^2(p;\, x)\, dx \right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (l=1, \ldots, 2p)$$

ergeben sich dann auf Grund von (2. 5) die Ungleichungen (2. 1) und (2. 2).

Damit ist der Hilfssatz I bewiesen.

Hilfssatz II. *Es sei $p(>8)$ eine gerade Zahl und ε eine positive Zahl. Es kann ein im Intervall $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $f_l(p, \varepsilon;\, x)$ $(l=1, \ldots, 2p)$ mit folgenden Eigenschaften angegeben werden: Es gilt*

$$\int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_l(p, \varepsilon;\, x)\, dx = 0 \qquad (l=1, \ldots, 2p); \tag{2.6}$$

zu jedem Intervall $\Delta_k^{(p)} = ((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(0<k\leqq p)$ gibt es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_1(k)$ derart, daß die Funktionswerte $f_{2l+1}(p, \varepsilon;\, x)$ $(l=0, \ldots, \mu_1(k))$ für $x \in \Delta_k^{(p)}$ positiv sind und

$$\sum_{l=0}^{\mu_1(k)} f_{2l+1}(p, \varepsilon;\, x) \geqq 2C\sqrt{p} \log p \tag{2.7}$$

besteht, bzw. zu jedem $\Delta_k^{(p)} = ((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(-p<k\leqq 0)$ gibt es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_2(k)$ derart, daß die Funktionswerte $f_{2l}(p, \varepsilon;\, x)$ $(l=\mu_2(k), \ldots, p)$ für $x \in \Delta_k^{(p)}$ positiv sind und

$$\sum_{l=\mu_2(k)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon;\, x) \geqq 2C\sqrt{p} \log p \tag{2.8}$$

besteht, wo C eine von k, p und ε unabhängige positive Konstante bedeutet. Weiterhin ist jede Funktion $f_l(p, \varepsilon; x)$ in jedem $\Delta_k^{(p)}$ konstant.

Beweis des Hilfssatzes II. Es sei, für $l=1, \ldots, 2p$,

$$f_l(p, \varepsilon; x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} g_l\left(p; x+\dfrac{3}{2}\right) & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ \sqrt{\dfrac{3}{2\varepsilon}} g_l\left(p; \dfrac{3}{\varepsilon}(x-1)\right) & \text{für} \quad 1 < x \leqq 1+\dfrac{\varepsilon}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{5}{2\varepsilon}} g_l\left(p; \dfrac{5}{\varepsilon}(x-1)\right) & \text{für} \quad 1+\dfrac{\varepsilon}{2} < x \leqq 1+\varepsilon, \end{cases}$$

wo die $g_l(p; x)$ die im Hilfssatz I erwähnten Funktionen sind; für $-1-\varepsilon \leqq x < 0$ wird $f_l(p, \varepsilon; x) = -f(p, \varepsilon; -x)$ gesetzt.

Offensichtlich sind die Funktionen $f_l(p, \varepsilon; x)$ Treppenfunktionen. Durch einfache Rechnung kann eingesehen werden, daß sie in $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ ein orthonormiertes System bilden und (2. 6) erfüllt ist.

Ist $x \in \Delta_k^{(p)}$ $(0 < k \leqq p)$, so ist $x+2^{-1}3 \in \delta^{(p)}_{2^{-1}3p+k}$; auf Grund der Definition der Funktionen $f_l(p, \varepsilon; x)$ und (2. 1) ergibt sich daher

$$\sum_{l=0}^{m_1(2^{-1}3p+k)} f_{2l+1}(p, \varepsilon; x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{m_1(2^{-1}3p+k)} g_{2l+1}(p; x+2^{-1}3) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} B\sqrt{p}\log p$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l+1}(p, \varepsilon; x)$ $(l=0, \ldots, m_1(2^{-1}3p+k))$; also besteht die Abschätzung (2. 7) mit $\mu_1(k) = m_1(2^{-1}3p+k)$ und $2C = B/\sqrt{2}$. Ist aber $x \in \Delta_k^{(p)}$ $(-p < k \leqq 0)$, so ist $-x \in \Delta_{-k+1}^{(p)}$, also gilt $-x+2^{-1}\cdot 3 \in \delta^{(p)}_{2^{-1}3p-k+1}$. Auf Grund der Definition der Funktionen $f_l(p, \varepsilon; x)$ und (2. 2) ergibt sich mithin

$$\sum_{l=m_2(2^{-1}3p-k+1)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon; x) = -\sum_{l=m_2(2^{-1}3p-k+1)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon; -x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=m_2(2^{-1}3p-k+1)}^{p} g_{2l}(p; -x+2^{-1}3) \geqq \frac{B}{\sqrt{2}} \sqrt{p}\log p$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l}(p, \varepsilon; x)$ $(l=m_2(2^{-1}3p-k+1), \ldots, p)$; also besteht die Abschätzung (2. 8) mit $\mu_2(k) = m_2(2^{-1}3p-k+1)$ und $2C = B/\sqrt{2}$.

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

Es sei $I = [u, v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$f_l(p, \varepsilon; I; x) = \begin{cases} f_l\left(p, \varepsilon; 2\dfrac{1+\varepsilon}{v-u}x-(1+\varepsilon)\dfrac{v+u}{v-u}\right) & \text{für} \quad u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l=1, \ldots, 2p)$. Ist H eine Teilmenge von $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, so wird mit $H(I)$ das durch die Transformation $x = \dfrac{v-u}{2(1+\varepsilon)} y + \dfrac{v+u}{2}$ entstehende Bild von H in $[u, v]$ bezeichnet.

Offensichtlich gelten

$$\text{(2. 9)} \qquad \operatorname{mes}(\Delta_k^{(p)}(I)) = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)} \operatorname{mes}(\Delta_k^{(p)}).^{16)}$$

und

$$\text{(2. 10)} \qquad \int_u^v f_i(p, \varepsilon, I; x) f_j(p, \varepsilon, I: x)\, dx = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)} \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} f_i(p, \varepsilon; x) f_j(p, \varepsilon; x)\, dx.$$

Aus (2. 6) ergibt sich

$$\text{(2. 11)} \qquad \int_u^v f_l(p, \varepsilon, I; x)\, dx = 0 \qquad (l=1, \dots, 2p),$$

während aus (2. 7) folgt, daß es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_1(k)$ gibt, für die

$$\text{(2. 12)} \qquad \sum_{l=0}^{\mu_1(k)} f_{2l+1}(p, \varepsilon, I; x) \geqq 2C\sqrt{p}\log p \qquad (x \in \Delta_k^{(p)}(I);\ 0<k\leqq p)$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l+1}(p, \varepsilon, I; x)$ $(l=0, \dots, \mu_1(k))$ besteht. Weiterhin folgt aus (2. 8), daß es eine von k abhängige natürliche Zahl $\mu_2(k)$ gibt, für die

$$\text{(2. 13)} \qquad \sum_{l=\mu_2(k)}^{p} f_{2l}(p, \varepsilon, I; x) \geqq 2C\sqrt{p}\log p \qquad (x \in \Delta_k^{(p)}(I);\ -p<k\leqq 0)$$

mit positiven Funktionswerten $f_{2l}(p, \varepsilon, I; x)$ $(l=\mu_2(k), \dots, p)$ besteht. Ferner ist jede Funktion $f_l(p, \varepsilon, I; x)$ in jedem $\Delta_k^{(p)}(I)$ konstant.

Hilfssatz III. *Es seien $N(\geqq 3)$ und $a(\geqq 1)$ natürliche Zahlen, weiterhin sei $\{c_n\}$ $(\nu_N<n\leqq \nu_{N+a})$ eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge. Man kann ein im Intervall* $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(N, a; x) = \varphi_n(a; x)$ $(\nu_N<n\leqq \nu_{N+a})$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

Es gilt

$$\text{(2. 14)} \qquad \int_0^1 \varphi_n(a; x)\, dx = 0 \qquad (\nu_N<n\leqq \nu_{N+a});$$

es gibt $\nu_{N+a}-\nu_{N+a-1}$ paarweise disjunkte Intervalle $I_i(a)$ $(\subseteqq [0, 1])$ gleicher Länge mit

$$\text{(2. 15)} \qquad \sum_{i=1}^{\nu_{N+a}-\nu_{N+a-1}} \operatorname{mes}(I_i(a)) > \frac{1}{2};$$

es gibt ferner eine Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\nu_{N+a}-\nu_N} c_{n(a,l)}\varphi_{n(a,l)}(a; x)$$

16) $\operatorname{mes}(H)$ bezeichnet das Lebesguesche Maß der Menge H.

der Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_N+a} c_n \varphi_n(a;\, x)$$

derart, daß für jedes i Indizes $l_1(a, i)$, $l_2(a, i)$ *existieren, so daß die Funktionswerte* $\varphi_{n(a,l)}(a;\, x)$ $(l_1(a, i) \leqq l \leqq l_2(a, i))$ *nicht-negativ sind, und*

$$\sum_{l=l_1(a,i)}^{l_2(a,i)} c_{n(a,l)} \varphi_{n(a,l)}(a;\, x) \geqq C \sum_{r=1}^{a} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \qquad (x \in I_i(a)) \tag{2.16}$$

besteht. Weiterhin ist jede Funktion $\varphi_n(a;\, x)$ *in jedem* $I_i(a)$ *konstant.*

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s III. Wir werden durch Induktion nach a schließen. Wir zeigen zuerst, daß die Behauptung für $a=1$ richtig ist. Es sei $\varepsilon_1 (<1)$ eine positive Zahl; wir wenden den Hilfssatz II mit $p=p_1=2^{-1}(\nu_{N+1}-\nu_N)$ und $\varepsilon=\varepsilon_1$ an. Es seien

$$\varphi_n(1;\, x) = \sqrt{2(1+\varepsilon_1)}\, f_{n-\nu_N}(p_1, \varepsilon_1, [0, 1];\, x) \qquad (\nu_N < n \leqq \nu_{N+1})$$

und

$$I_i(1) = \Delta_{i-p_1}^{(p_1)}([0, 1]) \qquad (i=1, \ldots, 2p_1).$$

Auf Grund von (2.10) bilden diese Treppenfunktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System, und aus (2. 11) folgt, daß (2. 14) für $a=1$ erfüllt ist; weiterhin ist jede Funktion $\varphi_n(1;\, x)$ in jedem $I_i(1)$ konstant. Nach (2. 9) ist

$$\sum_{i=1}^{2p_1} \operatorname{mes}(I_i(1)) = \frac{1}{2(1+\varepsilon_1)} \sum_{i=1}^{2p_1} \operatorname{mes}(\Delta_{i-p_1}) > \frac{1}{2},$$

also ist auch (2. 15) für $a=1$ erfüllt und die Intervalle $I_i(1)$ sind paarweise disjunkt und von gleicher Länge. Die Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_N+1} c_n \varphi_n(1;\, x)$$

ordnen wir folgenderweise an:

$$\sum_{l=1}^{p_1} c_{\nu_N+2l} \varphi_{\nu_N+2l}(1;\, x) + \sum_{l=0}^{p_1-1} c_{\nu_N+2l+1} \varphi_{\nu_N+2l+1}(1;\, x) = \sum_{l=1}^{2p_1} c_{n(1,l)} \varphi_{n(1,l)}(1;\, x).$$

Ist $x \in I_i(1)$, dann ist $2(1+\varepsilon)x-(1+\varepsilon) \in \Delta_{i-p_1}^{(p_1)}$, somit ergibt sich auf Grund von (2. 12) und (2. 13), daß es Indizes $l_1(1, i)$, $l_2(1, i)$ derart gibt, daß die Funktionswerte $\varphi_{n(1,l)}(1;\, x)$ $(l_1(1, i) \leqq l \leqq l_2(1, i))$ positiv sind und

$$\sum_{l=l_1(1,i)}^{l_2(1,i)} c_{n(1,l)} \varphi_{n(1,l)}(1;\, x) \geqq 2C\sqrt{2(1+\varepsilon_1)}\, c_{\nu_{N+1}} \sqrt{p_1} \log p_1 \geqq C\sqrt{\nu_{N+1}-\nu_N}\, c_{\nu_{N+1}} \log \nu_N$$

gilt. Also ist auch (2. 16) für $a=1$ erfüllt. Damit ist die Behauptung für $a=1$ bewiesen.

Wir nehmen nun an, daß der Hilfssatz für eine natürliche Zahl $\alpha(\geqq 1)$ schon bewiesen ist. Es sei $\varepsilon_{\alpha+1}$ eine positive Zahl, für die

$$\sum_{i=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \operatorname{mes}(I_i(\alpha)) \frac{1}{1+\varepsilon_{\alpha+1}} > \frac{1}{2} \tag{2.17}$$

besteht. Nach (2. 15) existiert ein solches $\varepsilon_{\alpha+1}$.

Wir wenden den Hilfssatz II mit $p=p_{\alpha+1}=2^{-1}(\nu_{N+\alpha+1}-\nu_{N+\alpha})(\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1})^{-1}$ und $\varepsilon=\varepsilon_{\alpha+1}$ an. Es sei

$$\varphi_n(\alpha+1;x)=\begin{cases}\varphi_n(\alpha;x) \quad \text{für} \quad \nu_N<n\leqq \nu_{N+\alpha},\\ \left[\dfrac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} f_{n-\nu_{N+\alpha}-(j-1)2p_{\alpha+1}}(p_{\alpha+1},\varepsilon_{\alpha+1},I_j(\alpha);x) \quad \text{für}\\ \qquad \nu_{N+\alpha}+(j-1)2p_{\alpha+1}<n\leqq \nu_{N+\alpha}+j2p_{\alpha+1} \quad (1\leqq j\leqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}),\end{cases}$$

wo $\mu(\alpha)=\operatorname{mes}(I_j(a))$ $(j=1,\dots,\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1})$ bedeutet, ferner sei

$$I_{(j-1)2p_{\alpha+1}+s}(\alpha+1)=\Delta_{s-p_{\alpha+1}}^{(p_{\alpha+1})}(I_j(\alpha)) \qquad (1\leqq j\leqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1};\ 1\leqq s\leqq 2p_{\alpha+1}).$$

Aus der Induktionsannahme und aus (2. 10), (2. 11) folgt leicht, daß diese Treppenfunktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System bilden. Aus der Induktionsannahme und aus (2. 11) folgt dann, daß (2. 14) für $a=\alpha+1$ richtig ist. Offensichtlich ist jede Funktion $\varphi_n(\alpha+1;x)$ in jedem $I_j(\alpha+1)$ konstant. Aus der Induktionsannahme und aus den Beziehungen (2. 9) und (2. 17) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{\nu_{N+\alpha+1}-\nu_{N+\alpha}} \operatorname{mes}(I_i(\alpha+1)) = \sum_{j=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \sum_{s=1}^{2p_{\alpha+1}} \operatorname{mes}(\Delta_{s-p_{\alpha+1}}^{(p_{\alpha+1})}(I_j(\alpha+1))) =$$

$$= \frac{1}{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})} \sum_{j=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \operatorname{mes}(I_j(\alpha)) \sum_{s=1}^{2p_{\alpha+1}} \operatorname{mes}(\Delta_{s-p_{\alpha+1}}^{(p_{\alpha+1})}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}} \operatorname{mes}(I_j(\alpha)) \frac{1}{1+\varepsilon_{\alpha+1}} > \frac{1}{2},$$

also ist auch (2. 15) für $a=\alpha+1$ erfüllt. Offensichtlich sind die Intervalle $I_j(\alpha+1)$ paarweise disjunkt und von gleicher Länge.

Wir werden endlich durch Induktion beweisen, daß auch (2. 16) für $a=\alpha+1$ erfüllt ist. Nach der Induktionsannahme und nach der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1;x)$ $(\nu_N<n\leqq \nu_{N+\alpha})$ gibt es nämlich Indizes $l_1(\alpha,1)$, $l_2(\alpha,1)$, so daß die Funktionswerte $\varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1;x)$ $(l_1(\alpha,1)\leqq l\leqq l_2(\alpha,1))$ für $x\in I_1(\alpha)$ positiv sind und

$$\sum_{l=l_1(\alpha,1)}^{l_2(\alpha,1)}{}' c_{n(\alpha,l)}\varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1;x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}}\log \nu_{N+r-1} \tag{2.18}$$
$$(x\in I_1(\alpha))$$

besteht. Aus (2. 12) und (2. 13) folgt weiter auf Grund der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1;x)$ und der Intervalle $I_i(\alpha+1)$, daß es für $1\leqq i\leqq p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar\mu_1(i)$ bzw. für $p_{\alpha+1}<i\leqq 2p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar\mu_2(i)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: die

Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}(\alpha+1;x)$ $(0\leqq m\leqq \bar{\mu}_1(i))$ für $x\in I_i(\alpha+1)$ $(1\leqq i\leqq p_{\alpha+1})$ bzw. die Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha+2m}}(\alpha+1;x)$ $(\mu_2(i)\leqq m\leqq p_{\alpha+1})$ für $x\in I_i(\alpha+1)$ $(p_{\alpha+1}<i\leqq 2p_{\alpha+1})$ sind positiv und es gilt

$$\tag{2.19} \begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\bar{\mu}_1(i)} c_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}(\alpha+1;x)\geqq \\ &\geqq 2C\left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)}p_{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{2}} c_{\nu_{N+\alpha+1}}\log p_{\alpha+1} \end{aligned}$$

bzw.

$$\tag{2.20} \begin{aligned} &\sum_{m=\bar{\mu}_2(i)}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2m}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m}(\alpha+1;x)\geqq \\ &\geqq 2C\left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)}p_{\alpha+1}\right]^{\frac{1}{2}} c_{\nu_{N+\alpha+1}}\log p_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Die Glieder der Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+\alpha}+2p_{\alpha+1}} c_n\varphi_n(\alpha+1;x)$$

ordnen wir folgenderweise an:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{l_1(\alpha,1)-1} c_{n(\alpha,l)}\varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1;x)+\sum_{m=1}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2m}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m}(\alpha+1;x)+ \\ &+\sum_{l=l_1(\alpha,1)}^{l_2(\alpha,1)} c_{n(\alpha,l)}\varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1;x)+\sum_{m=0}^{p_{\alpha+1}-1} c_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2m+1}(\alpha+1;x)+ \\ &+\sum_{l=l_2(\alpha,1)+1}^{\nu_{N+\alpha}-\nu_N} c_{n(\alpha,l)}\varphi_{n(\alpha,l)}(\alpha+1;x)=\sum_{l=1}^{\nu_{N+\alpha}+2p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{r_l}\varphi_{r_l}(\alpha+1;x). \end{aligned}$$

Da nach der Induktionsannahme $(\mu(\alpha))^{-1}\geqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1}$ gilt, ergibt sich aus (2. 18), (2. 19) und (2. 20), daß für jedes i $(1\leqq i\leqq 2p_{\alpha+1})$ Indizes $l_1(i)$, $l_2(i)$ existieren, für welche die Funktionswerte $\varphi_{r_l}(\alpha+1;x)$ $(l_1(i)\leqq l\leqq l_2(i))$ im Falle $x\in I_i(\alpha+1)$ positiv sind und

$$\sum_{l=l_1(i)}^{l_2(i)} c_{r_l}\varphi_{r_l}(\alpha+1;x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha+1}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,c_{\nu_{N+r}}\log \nu_{N+r-1}$$

besteht. Weiterhin, nach der Induktionsannahme und der obigen Anordnung gibt es für jedes j $(1<j\leqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1})$ Indizes $k_1(j)$, $k_2(j)$ für welche die Funktionswerte $\varphi_{r_l}(\alpha+1;x)$ $(k_1(j)\leqq l\leqq k_2(j))$ im Falle $x\in I_j(\alpha)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=k_1(j)}^{k_2(j)} c_{r_l}\varphi_{r_l}(\alpha+1;x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,c_{\nu_{N+r}}\log \nu_{N+r-1}$$

gilt.

Es sei j_0 $(1 \leqq j_0 < \nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1})$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}} c_n \varphi_n(\alpha+1;\, x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{\bar r_l} \varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x)$$

mit folgender Eigenschaft hat: Für jedes i $(1 \leqq i \leqq 2j_0 p_{\alpha+1})$ existieren Indizes $\bar l_1(i)$, $\bar l_2(i)$ derart, daß die Funktionswerte $\varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x)$ $(\bar l_1(i) \leqq l \leqq \bar l_2(i))$ im Falle $x \in I_i(\alpha+1)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=\bar l_1(i)}^{\bar l_2(i)} c_{\bar r_l} \varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha+1} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \tag{2.21}$$

besteht. Weiterhin gibt es für jedes j $(j_0 < j \leqq \nu_{N+\alpha} - \nu_{N+\alpha-1})$ Indizes $\bar k_1(j)$, $\bar k_2(j)$, für welche die Funktionswerte $\varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x)$ $(\bar k_1(j) \leqq l \leqq \bar k_2(j))$ im Falle $x \in I_j(\alpha)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=\bar k_1(j)}^{\bar k_2(j)} c_{\bar r_l} \varphi_{\bar r_l}(\alpha+1;\, x) \geqq C \sum_{r=1}^{\alpha} \sqrt{\nu_{N+r} - \nu_{N+r-1}}\, c_{\nu_{N+r}} \log \nu_{N+r-1} \tag{2.22}$$

gilt. Aus (2. 12) und (2. 13) folgt auf Grund der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1;\, x)$ und der Intervalle $I_i(\alpha+1)$, daß es für $2j_0 p_{\alpha+1} < i \leqq (2j_0+1)p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar{\bar\mu}_1(i)$ $(< p_{\alpha+1})$ bzw. für $(2j_0+1)p_{\alpha+1} < i \leqq 2(j_0+1)p_{\alpha+1}$ einen Index $\bar{\bar\mu}_2(i)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Die Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m+1}(\alpha+1;\, x)$ $(0 \leqq m \leqq \bar{\bar\mu}_1(i))$ sind für $x \in I_i(\alpha+1)$ bzw. die Funktionswerte $\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m}(\alpha+1;\, x)$ $(\mu_2(i) \leqq m \leqq p_{\alpha+1})$ für $x \in I_i(\alpha+1)$ positiv und es gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\bar{\bar\mu}_1(i)} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m+1} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m+1}(\alpha+1;\, x) \geqq \\ &\geqq 2C \left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)} p_{\alpha+1} \right]^{\frac12} c_{\nu_{N+\alpha+1}} \log p_{\alpha+1} \end{aligned} \tag{2.23}$$

bzw.

$$\begin{aligned} &\sum_{m=\bar{\bar\mu}_2(i)}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m} \varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0 p_{\alpha+1}+2m}(\alpha+1;\, x) \geqq \\ &\geqq 2C \left[\frac{2(1+\varepsilon_{\alpha+1})}{\mu(\alpha)} p_{\alpha+1} \right]^{\frac12} c_{\nu_{N+\alpha+1}} \log p_{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Glieder der Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+\alpha}+2(j_0+1)p_{\alpha+1}} c_n \varphi_n(\alpha+1;\, x)$$

ordnen wir folgenderweise an:

$$\sum_{l=1}^{\bar{k}_1(j_0+1)-1} c_{\bar{r}_l}\varphi_{\bar{r}_l}(\alpha+1;\,x)+\sum_{m=1}^{p_{\alpha+1}} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m}(\alpha+1;\,x)+$$

$$+\sum_{l=\bar{k}_1(j_0+1)}^{\bar{k}_2(j_0+1)} c_{\bar{r}_l}\varphi_{\bar{r}_l}(\alpha+1;\,x)+$$

$$+\sum_{m=0}^{p_{\alpha+1}-1} c_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m+1}\varphi_{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}+2m+1}(\alpha+1;\,x)+$$

$$+\sum_{l=\bar{k}_2(j_0+1)+1}^{\nu_{N+\alpha}+2j_0p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{\bar{r}_l}\varphi_{\bar{r}_i}(\alpha+1;\,x)=\sum_{l=1}^{\nu_{N+\alpha}+2(j_0+1)p_{\alpha+1}-\nu_N} c_{\varrho_l}\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x).$$

Nach der Induktionsannahme und nach der Definition der Funktionen $\varphi_n(\alpha+1;\,x)$ ergibt sich aus (2. 21), (2. 22), (2. 23) und (2. 24), daß zu jedem i $(1\leqq i\leqq 2(j_0+1)p_{\alpha+1})$ Indizes $\lambda_1(i), \lambda_2(i)$ existieren, für welche die Funktionswerte $\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)$ $(\lambda_1(i)\leqq l\leqq \lambda_2(i))$ im Falle $x\in I_i(\alpha+1)$ nicht-negativ sind und die Beziehung

$$\sum_{l=\lambda_1(i)}^{\lambda_2(i)} c_{\varrho_l}\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha+1}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,c_{\nu_{N+r}}\log\nu_{N+r-1}$$

besteht. Weiterhin gibt es für jedes j $(j_0+1<j\leqq \nu_{N+\alpha}-\nu_{N+\alpha-1})$ Indizes $\varkappa_1(j), \varkappa_2(j)$, für welche die Funktionswerte $\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)$ $(\varkappa_1(j)\leqq l\leqq\varkappa_2(j))$ im Falle $x\in I_j(\alpha)$ nicht-negativ sind und

$$\sum_{l=\varkappa_1(j)}^{\varkappa_2(j)} c_{\varrho_l}\varphi_{\varrho_l}(\alpha+1;\,x)\geqq C\sum_{r=1}^{\alpha}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,c_{\nu_{N+r}}\log\nu_{N+r-1}$$

gilt. Mittels Induktion ergibt sich also, daß die Beziehung (2. 16) in einer gewissen Anordnung für jedes i $(1\leqq i\leqq \nu_{N+\alpha+1}-\nu_{N+\alpha})$ besteht.

Damit haben wir den Hilfssatz III vollständig bewiesen.

Hilfssatz III wird in folgender Form angewendet:

Hilfssatz IV. *Es seien $N(\geqq 3)$ und $a(\geqq 1)$ natürliche Zahlen, ferner $\{c_n\}$ $(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a})$ eine positive, monoton abnehmende Folge. Man kann ein im Intervall $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(N, a;\,x)$ $(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a})$ und eine einfache Menge*[17] *$F(N, a)$ $(\subseteqq[0, 1])$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

Es gelten die Beziehungen

$$\operatorname{mes}(F(N, a))>2^{-1},\quad \int_0^1\varphi_n(N, a;\,x)\,dx=0\qquad(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a});$$

und es gibt für die Summe

$$\sum_{n=\nu_N+1}^{\nu_{N+a}} c_n\varphi_n(N, a;\,x)$$

[17]) Eine Menge heißt einfach, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Intervalle ist.

eine Anordnung

$$\sum_{l=\nu_N+1}^{\nu_{N+a}} c_{n_l}\varphi_{n_l}(N, a; x)$$

derart, daß für jedes $x\in F(N,a)$ *von* x *abhängige Indizes* $n(x)$, $m(x)$ $(\nu_N<n(x)<m(x)\leqq\nu_{N+a})$ *existieren mit*

$$\sum_{l=n(x)}^{m(x)} c_{n_l}\varphi_{n_l}(N, a; x)\geqq C\sum_{r=1}^{a}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\log\nu_{N+r-1}\cdot c_{\nu_{N+r}}.$$

Es sei $I=[u,v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$\varphi_n(N, a, I; x)=\begin{cases}\varphi_n\left(N, a; \dfrac{x-u}{v-u}\right) & \text{für}\quad u<x<v,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(\nu_N<n\leqq\nu_{N+a})$ und $F(N,a,I)$ bezeichne das mittels der Transformation $y=(v-u)x$ erhaltene Bild von $F(N,a)$ im Intervall I.

Es ist

$$\text{(2.25)}\qquad \operatorname{mes}\big(F(N,a,I)\big)>2^{-1}\operatorname{mes}(I).$$

Für die Treppenfunktionen $\varphi_n(N,a,I;x)$ bestehen die Beziehungen

$$\text{(2. 26)}\qquad \int_u^v\varphi_i(N, a, I; x)\varphi_j(N, a, I; x)\,dx=\operatorname{mes}(I)\int_0^1\varphi_i(N, a; x)\varphi_j(N, a; x)\,dx,$$

$$\text{(2. 27)}\qquad \int_u^v\varphi_n(N, a, I; x)\,dx=0.$$

Für $x\in F(N,a,I)$ existieren offensichtlich von x abhängige Indizes $n(x)$, $m(x)$ $(\nu_N<n(x)<m(x)\leqq\nu_{N+a})$ derart, daß

$$\text{(2. 28)}\qquad \sum_{l=n(x)}^{m(x)} c_{n_l}\varphi_{n_l}(N, a, I; x)\geqq C\sum_{r=1}^{a}\sqrt{\nu_{N+r}-\nu_{N+r-1}}\,2^{N+r-1}c_{\nu_{N+r}}$$

gilt.

§ 3. Beweis des Satzes II im Falle $\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\nu_k}a_{\nu_k}2^k=\infty$.

Ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\nu_k}a_{\nu_k}2^k=\infty,$$

so existiert eine im strengen Sinne monoton wachsende Indexfolge $\{N_m\}$ $(N_1=4)$, für welche die Abschätzung

$$\text{(3. 1)}\qquad \sum_{r=1}^{N_{m+1}-N_m}\sqrt{\nu_{N_m+r}-\nu_{N_m+r-1}}\,2^{N_m+r-1}a_{\nu_{N_m+r}}\geqq 1\qquad (m=1, 2, \ldots)$$

gilt.

Mittels Induktion werden wir ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_m(\subseteqq[0, 1])$ $(m=1, 2, \dots)$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

a) Die Mengen F_m sind stochastisch unabhängig und für jedes m gilt

$$\text{mes}\,(F_m) > \frac{1}{2}; \tag{3.2}$$

b) die Summe

$$\sum_{n=\nu_{N_m}+1}^{\nu_{N_{m+1}}} a_n \Phi_n(x)$$

läßt sich derart in

$$\sum_{l=\nu_{N_m}+1}^{\nu_{N_{m+1}}} a_{n_l} \Phi_{n_l}(x)$$

anordnen, daß es für jedes $x \in F_m$ Indizes $n_m(x)$, $m_m(x)$ $(\nu_{N_m} < n_m(x) < m_m(x) \leqq \nu_{N_{m+1}})$ gibt mit

$$\sum_{l=n_m(x)}^{m_m(x)} a_{n_l} \Phi_{n_l}(x) \geqq C. \tag{3.3}$$

Es sei zunächst

$$\Phi_n(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x \qquad (1 \leqq n \leqq \nu_{N_1}).$$

Wir teilen das Intervall $[0, 1]$ in endlichviele Teilintervalle I_r $(1 \leqq r \leqq \varrho)$ derart ein, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_1})$ in jedem I_r konstant sind. Wir wenden den Hilfssatz IV mit $N = N_1$, $a = N_2 - N_1$, $c_n = a_n$ $(\nu_{N_1} < n \leqq \nu_{N_2})$ an und setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \varphi_n(N_1, N_2 - N_1, I_r;\ x) \qquad (\nu_{N_1} < n \leqq \nu_{N_2}),$$

$$F_1 = \bigcup_{r=1}^{\varrho} F(N_1, N_2 - N_1, I_r).$$

Aus (2. 26) und (2. 27) folgt, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_2})$ in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden. Aus (2. 25) folgt, daß (3. 2) für $m=1$ erfüllt ist. Aus (2. 28) und (3. 1) folgt, daß b) für $m=1$ richtig ist. Die Menge F_1 ist offensichtlich einfach.

Es sei $\mu(>1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_\mu})$ und die einfachen Mengen $F_m(\subseteqq[0, 1])$ $(1 \leqq m \leqq \mu-1)$ schon derart definiert sind, daß diese Funktionen in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System bilden und die Mengen F_m stochastisch unabhängig sind, ferner daß (3. 2) und b) für $m=1, \dots$ $\dots, \mu-1$ erfüllt sind. Dann kann das Intervall $[0, 1]$ in endlichviele Teilintervalle J_s $(1 \leqq s \leqq \sigma)$ eingeteilt werden derart, daß in jedem J_s die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{N_\mu})$ konstant bleiben und jede Menge F_m $(1 \leqq m < \mu)$ die Vereinigung gewisser J_s ist. Wir wenden den Hilfssatz IV mit $N=N_\mu$, $a=N_{\mu+1}-N_\mu$, $c_n=a_n$ $(\nu_{N_\mu}<n\leqq\nu_{N_{\mu+1}})$ an und setzen

$$\Phi_n(x)=\sum_{s=1}^{\sigma}\varphi_n(N_\mu, N_{\mu+1}-N_\mu, J_s;\, x)\quad(\nu_{N_\mu}<n\leqq\nu_{N_{\mu+1}}),$$

$$F_\mu=\bigcup_{s=1}^{\sigma}F(N_\mu, N_{\mu+1}-N_\mu, J_s).$$

Aus (2. 26) und (2. 27) folgt, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq\nu_{N_{\mu+1}})$ in [0, 1] ein orthonormiertes System bilden. Aus (2. 25) folgt, daß (3. 2) für $m=\mu$ erfüllt ist. Aus (2. 28) und (3. 1) folgt, daß b) für $m=\mu$ richtig ist. F_μ ist offensichtlich einfach und die Mengen F_m $(m=1, \ldots, \mu)$ sind stochastisch unabhängig. Durch Induktion erhalten wir also das System $\{\Phi_n(x)\}$ und die Folge $\{F_m\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Wir betrachten die unter b) angegebene Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\infty}a_{n_l}\Phi_{n_l}(x)\tag{3. 4}$$

der Orthogonalreihe (5), deren Existenz soeben bewiesen wurde (hierbei setzen wir $n_l=l$ für $l=1, \ldots, \nu_{N_1}$). Ist $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,F_m$, so besteht (3. 3) für unendlich viele m. Wegen $\nu_{N_m}<n_m(x)<m_m(x)\leqq\nu_{N_{m+1}}$ $(m=1, 2, \ldots)$ folgt daraus, daß die Reihe (3. 4) im Punkt x divergiert. Da die Mengen F_m stochastisch unabhängig sind und (3. 2) für jedes m gilt, ergibt sich durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas

$$\operatorname{mes}\big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,F_m\big)=1.$$

Also divergiert die Reihe (3. 4) in [0, 1] fast überall.

Damit haben wir den Satz II im Falle $\sum\sqrt{\bar\nu_k}a_{\nu_k}2^k=\infty$ bewiesen.

§ 4. Hilfssätze für den Beweis des Satzes II im Falle $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sqrt{\bar\nu_k}a_{\nu_k}2^k<\infty$

Hilfssatz V. *Es sei* $\{\bar\varphi_k(x)\}$ $(k=1, \ldots, 2K)$ *ein im Intervall* $[0, \bar a]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen,* c_k $(k=1, \ldots, 2K)$ *reelle Zahlen,* $\bar I_l=(\bar u_l, \bar v_l)$ $(\subseteq[0, \bar a])$ $(l=1, \ldots, L)$ *paarweise disjunkte Intervalle gleicher Länge* I *mit* $LI<\bar a$, $\bar u_{l+1}\geqq\bar v_l$ $(l=1, \ldots, L-1)$, ϱ_l *positive Zahlen und* $\varrho^2=\varrho_1^2+\ldots+\varrho_L^2$. *Wir nehmen an, daß jede Funktion* $\bar\varphi_k(x)$ *in jedem* $\bar I_l$ *konstant ist und für jedes* l *Indizes* $\varkappa_1(l)$, $\varkappa_2(l)$ *existieren mit*

$$c_1\bar\varphi_1(x)+c_3\bar\varphi_3(x)+\ldots+c_{2\varkappa_1(l)+1}\bar\varphi_{2\varkappa_1(l)+1}(x)\geqq\varrho_l$$

und

$$c_{2\varkappa_2(l)}\bar\varphi_{2\varkappa_2(l)}(x)+c_{2\varkappa_2(l)+2}\bar\varphi_{2\varkappa_2(l)+2}(x)+\ldots+c_{2K}\bar\varphi_{2K}(x)\leqq-\varrho_l$$

für $x\in\bar I_l$ $(l=1, \ldots, L)$. *Dann gibt es ein in* [0, 1] *orthonormiertes System von Treppen-*

funktionen $\varphi_k(x)$ $(k=1, \ldots, 2K)$ *und paarweise disjunkte Intervalle* $I_l=(u_l, v_l)$ $(\subseteqq[0, 1]; l=1, \ldots, L)$ *mit* $u_{l+1} \geqq v_l$ $(l=1, \ldots, L-1)$ *derart, daß*

$$c_1\varphi_1(x)+c_3\varphi_3(x)+\ldots+c_{2\varkappa_1(l)+1}\varphi_{2\varkappa_1(l)+1}(x) \geqq \sqrt{2I}\varrho,$$

$$c_{2\varkappa_2(l)}\varphi_{2\varkappa_2(l)}(x)+c_{2\varkappa_2(l)+2}\varphi_{2\varkappa_2(l)+2}(x)+\ldots+c_{2K}\varphi_{2K}(x) \leqq -\sqrt{2I}\varrho$$

für $x \in I_l$ *und*

$$\operatorname{mes}(I_l)=\frac{1}{2}\varrho^{-2}\varrho_l^2 \qquad (l=1, \ldots, L)$$

bestehen. Weiterhin ist jede Funktion $\varphi_k(x)$ *in jedem* I_l *konstant.*

Einen ähnlichen Hilfssatz habe ich schon früher benützt[18]).

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s V. Es sei $\varrho_0=\bar{u}_0=\bar{v}_0=0$, $\mu_{L+1}=$ $=\bar{v}_{L+1}=\bar{a}$ und

$$s=\sum_{l=1}^{L+1}(\bar{u}_l-\bar{v}_{l-1}).$$

Wir setzen:

$$u_l=2^{-1}\varrho^{-2}\sum_{i=0}^{l-1}\varrho_i^2+2^{-1}s^{-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{u}_i-\bar{v}_{i-1}) \qquad (l=1, \ldots, L+1)$$

und

$$v_l=2^{-1}\varrho^{-2}\sum_{i=0}^{l}\varrho_i^2+2^{-1}s^{-1}\sum_{i=1}^{l}(\bar{u}_i-\bar{v}_{i-1}) \qquad (l=0, \ldots, L).$$

Es ist $0=v_0 \leqq u_1<v_1 \leqq \ldots \leqq u_L<v_L \leqq u_{L+1}=1$. Es sei $I_l=(u_l, v_l)$ $(l=1, \ldots, L)$ und

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\sqrt{2s}\,\bar{\varphi}_k(\bar{v}_l+2s(x-v_l)), & x\in(v_l, u_{l+1}) \quad (l=0, \ldots, L),\\ \sqrt{2I}\dfrac{\varrho}{\varrho_l}\bar{\varphi}_k\left(\bar{u}_l+2I\varrho^2\dfrac{x-u_l}{\varrho_l^2}\right), & x\in(u_l, v_l) \quad (l=1, \ldots, L),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(k=1, \ldots, 2K)$.

Offensichtlich erfüllen diese Funktionen und diese Intervalle alle die erforderten Bedingungen.

Damit ist Hilfssatz V bewiesen.

H i l f s s a t z VI. *Es sei* $a(\geqq 576)$ *eine durch* 16 *teilbare natürliche Zahl, b eine positive ganze Zahl und* $\{d_n\}$ $(n=1, \ldots, ab)$ *eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge mit* $d_{(i-1)a+j}=d_{ia}$ $(j=1, \ldots, a;\ i=1, \ldots, b)$; $m(k)$ *bezeichne die Anzahl derjenigen Indizes n, für welche* $(k-1)d_{ab}^2<d_n^2 \leqq kd_{ab}^2$ *besteht und es sei*

$$N=\sum_{k\geqq 1}km(k)(\geqq ab).$$

---

[18]) K. TANDORI, Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math. Debrecen*, **8** (1961), 291–307.

N ist durch 16 teilbar und im Falle $d_{ab}^2 \geqq A^{-1} d_1^2$ $(A>0)$ *gilt*

$$N \leqq ab(A+1). \tag{4. 1}$$

Man kann ein im Intervall $[0, 1]$ *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $f_n(x)$ $(n=1, \dots, ab)$ *mit der folgenden Eigenschaft angeben. Es gibt paarweise disjunkte Intervalle* $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ $(\subseteqq [0, 1])$ $(k=1, \dots, M)$ *mit* $\alpha_{k+1} \geqq \beta_k$,

$$M \leqq \frac{1}{2} N^2, \tag{4. 2}$$

$$\max(\operatorname{mes}(J_1), \dots, \operatorname{mes}(J_M)) \leqq 2 \min(\operatorname{mes}(J_1), \dots, \operatorname{mes}(J_M)) \tag{4. 3}$$

und

$$\sum_{k=1}^{M} \operatorname{mes}(J_k) = \frac{1}{2} \tag{4. 4}$$

derart, daß jede Funktion $f_n(x)$ *in jedem* J_k *konstant ist. Weiterhin hat die Summe*

$$\sum_{n=1}^{ab} d_n f_n(x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{m=1}^{ab} d_{n_m} f_{n_m}(x)$$

derart, daß es für jedes k $(k=1, \dots, M)$ *Indizes* $m_1(k)$, $m_2(k)$ *gibt, für die im Falle* $x \in J_k$ *die Funktionswerte* $f_{n_{2\mu-1}}(x)$ $(\mu=1, \dots, m_1(k))$ *positiv und die Funktionswerte* $f_{n_{2\mu}}(x)$ $(\mu=m_2(k), \dots, 2^{-1}ab)$ *negativ sind und*

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(k)} d_{n_{2\mu-1}} f_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq D \left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \dots + d_{ab}^2}{d_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4. 5}$$

bzw.

$$\sum_{\mu=m_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} f_{n_{2\mu}}(x) \leqq -D \left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \dots + d_{ab}^2}{d_n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4. 6}$$

mit einer positiven, von a, b, $\{d_n\}$ *und* x *unabhängigen Konstante* D *gelten.*

Einen ähnlichen Hilfssatz habe ich schon vorherig mitgeteilt[19]).

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s VI. Nach der Definition von N besteht (4. 1). Bezeichne $g_l(p; x)$ für $l=1, \dots, 2p$ mit $p=2^{-1}N$ die im Hilfssatz I erwähnten Funktionen. Nach ihrer Definition und nach (2. 5) gilt

$$g_l(p; x) = \gamma_l \frac{\sqrt{p}}{k-p-l-1/2} \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{k-1}{p}, \frac{k}{p}\right) \quad (k=1, \dots, 4p;\ l=1, \dots, 2p),$$

[19]) S. loc. cit. [18]).

wo

$$\gamma_l \geqq \gamma(>0) \qquad (l=1, \ldots, 2p) \tag{4. 7}$$

ist. Es sei $\bar{g}_l(p; x) = g_l(p; x)$ $(l=1, \ldots, 2p-1)$ und $\bar{g}_0(p; x) = g_{2p}(p; x)$.

Für jedes n $(n=1, \ldots, ab)$ bezeichne q_n jene natürliche Zahl, für welche $(q_n-1)d_{ab}^2 < d_n^2 \leqq q_n d_{ab}^2$ besteht. Offensichtlich ist $q_1 + \ldots + q_{ab} = N$, $1 \leqq q_n \leqq a^{-1}N$, $2^{-1}d_{ab}^2 \leqq d_n^2 q_n^{-1}$, $q_n \geqq q_{n+1}$ $(n=1, \ldots, ab)$ und $q_n = 1$ $((b-1)a < n \leqq ba)$. Die Zahlen

$$1, 2, \ldots, \frac{a}{4}, a+1, a+2, \ldots, a+\frac{a}{4}, 2a+1, 2a+2, \ldots, 2a+\frac{a}{4}, \ldots$$

$$\ldots, (b-1)a+1, (b-1)a+2, \ldots, (b-1)a+\frac{a}{4}$$

$$\frac{a}{4}+1, \frac{a}{4}+2, \ldots, \frac{3}{4}a, a+\frac{a}{4}+1, a+\frac{a}{4}+2, \ldots, a+\frac{3}{4}a,$$

$$2a+\frac{a}{4}+1, 2a+\frac{a}{4}+2, \ldots, 2a+\frac{3}{4}a, \ldots$$

$$\ldots, (b-2)a+\frac{a}{4}+1, (b-2)a+\frac{a}{4}+2, \ldots, (b-2)a+\frac{3}{4}a,$$

$$(b-1)a+\frac{a}{4}+1, (b-1)a+\frac{a}{4}+2, \ldots, (b-1)a+\frac{3}{4}a,$$

$$(b-1)a+\frac{3}{4}a+1, (b-1)a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, ba,$$

$$(b-2)a+\frac{3}{4}a+1, (b-2)a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, (b-1)a,$$

$$(b-3)a+\frac{3}{4}a+1, (b-3)a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, (b-2)a, \ldots$$

$$\ldots, a+\frac{3}{4}a+1, a+\frac{3}{4}a+2, \ldots, 2a, \frac{3}{4}a+1, \frac{3}{4}a+2, \ldots, a$$

bezeichnen wir in dieser Anordnung mit n_m $(m=1, \ldots, ab)$. Nach dem Obigen ist für jedes μ $q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu-1}} = q_{n_2}+q_{n_4}+\ldots+q_{n_{2\mu}}$. Sei $q_{n_0}=q_{n_{-1}}=0$ und dann setzen wir

$$\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{q_{n_{2\mu-1}}}} \sum_{l=q_{n_{-1}}+q_{n_1}+\ldots+q_{n_{2\mu-3}}}^{q_{n_{-1}}+q_{n_1}+\ldots+q_{n_{2\mu-3}}+q_{n_{2\mu-1}}-1} \bar{g}_{2l+1}(p; x) \qquad (\mu=1, \ldots, 2^{-1}ab)$$

und

$$\bar{f}_{n_{2\mu}}(x) = \frac{1}{\sqrt{q_{n_{2\mu}}}} \sum_{l=q_{n_0}+q_{n_2}+\ldots+q_{n_{2\mu-2}}}^{q_{n_0}+q_{n_2}+\ldots+q_{n_{2\mu-2}}+q_{n_{2\mu}}-1} \bar{g}_{2l}(p; x) \qquad (\mu=1, \ldots, 2^{-1}ab).$$

Offensichtlich bilden diese Treppenfunktionen in [0, 5] ein orthonormiertes System und jede Funktion ist in jedem Intervall $((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(k=2^{-1}3p+1, \ldots, 2^{-1}5p)$ konstant.

Es sei $x \in ((k-1)p^{-1}, kp^{-1})$ $(2^{-1}3p<k\leqq 2^{-1}5p)$. Dann gibt es natürliche Zahlen $\mu_1(k), \mu_2(k)$ derart, daß $2(q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu_1(k)-1}})\leqq k-p<2(q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu_1(k)-1}}+q_{n_{2\mu_1(k)+1}})$ bzw. $2(q_{n_2}+q_{n_4}+\ldots+q_{n_{2\mu_2(k)-4}})<k-p\leqq 2(q_{n_2}+q_{n_4}+\ldots+q_{n_{2\mu_2(k)-4}}+q_{n_{2\mu_2(k)-2}})$, d. h.

$$N-2\sum_{\mu=\mu_2(k)-2}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}}<k-p\leqq N-2\sum_{\mu=\mu_2(k)}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}}.$$

Da nach dem Obigen $4^{-1}N+1\leqq k-p\leqq 4^{-1}3N$ und

$$\sum_{\mu=1}^{8^{-1}ab} q_{n_{2\mu-1}} = \sum_{\mu=8^{-1}3ab+1}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}} = 8^{-1}N, \quad \sum_{\mu=1}^{8^{-1}3ab} q_{n_{2\mu-1}} = \sum_{\mu=8^{-1}ab+1}^{2^{-1}ab} q_{n_{2\mu}} = 8^{-1}3N$$

ist, ergibt sich $8^{-1}ab\leqq\mu_1(k)\leqq 8^{-1}3ab$ bzw. $8^{-1}ab+2\leqq\mu_2(k)\leqq 8^{-1}3ab+1$ und $\mu_1(k)$ bzw. $\mu_2(k)$ nimmt alle ganzzahligen Werte aus dem Intervall $[8^{-1}ab, 8^{-1}3ab]$ bzw. $[8^{-1}ab+2, 8^{-1}3ab+1]$ an. Nach der Definition der Funktionen $\bar{f}_n(x)$ sind die Funktionswerte $\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x)$ $(\mu=1, \ldots, \mu_1(k))$ positiv bzw. die Funktionswerte $\bar{f}_{n_{2\mu}}(x)$ $(\mu=\mu_2(k), \ldots, 2^{-1}ab)$ negativ; auf Grund von (4. 7) ergibt sich durch einfache Rechnung

$$\text{(4. 8)} \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu_1(k)} d_{n_{2\mu-1}}\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq \frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\,d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k)+1}}}$$

und

$$\text{(4. 9)} \qquad \sum_{\mu=\mu_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}}f_{n_{2\mu}}(x) \leqq -\frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\,d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_2(k)-2}}}.$$

Es seien $k_1<k_2<\ldots<k_{\overline{M}}$ jene natürliche Zahlen k, für welche $2^{-1}3p<k\leqq 2^{-1}5p$ und $2(q_{n_1}+q_{n_3}+\ldots+q_{n_{2\mu_1(k)-1}})\neq k-p$ gilt. Offensichtlich ist $\overline{M}=p-4^{-1}ab\geqq 4^{-1}N$. Nach den Definitionen von $\mu_1(k)$ und $\mu_2(k)$ gilt $\mu_1(k_i)=\mu_2(k_i)-2$, also $2\mu_1(k_i)+1<$ $<2\mu_2(k_i)-2$ $(i=1, \ldots, \overline{M})$. Nach dem Obigen ergeben sich mithin aus (4. 8) und (4. 9) für $x\in\bar{I}^*=((k_i-1)p^{-1}, k_ip^{-1})$ $(i=1, \ldots, \overline{M})$ die Abschätzungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_1(k_i)} d_{n_{2\mu-1}}\bar{f}_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq \frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\,d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}}$$

und

$$\sum_{\mu=\mu_2(k_i)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}}\bar{f}_{n_{2\mu}}(x) \leqq -\frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\,d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}}.$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes V mit

$$\varrho_i=\frac{\gamma}{4}\sqrt{N}\,d_{ab}\log\frac{N}{q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}}, \quad \bar{I}_i=\bar{I}_i^* \ (i=1, \ldots, \overline{M}), \quad \varrho=\sqrt{\sum_{i=1}^{\overline{M}}\varrho_i^2}$$

ergibt sich ein in [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\{f_n(x)\}$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt paarweise disjunkte Intervalle $I_i = (u_i, v_i)$ $(\subseteq [0, 1])$ $(i=1, \ldots, \overline{M})$ mit $u_{i+1} \geqq v_i$ und

$$\text{mes}\,(I_i) = \frac{1}{2}\,\varrho^{-2}\varrho_i^2, \tag{4.10}$$

so daß im Falle $x \in I_i$ die Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\mu_1(k_i)} d_{n_{2\mu-1}} f_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq \sqrt{2p^{-1}}\,\varrho \tag{4.11}$$

und

$$\sum_{\mu=\mu_2(k_i)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} f_{n_{2\mu}}(x) \leqq -\sqrt{2p^{-1}}\,\varrho \tag{4.12}$$

bestehen. Weiterhin ist jede Funktion $f_n(x)$ in jedem I_i konstant.

Nach dem Obigen ist $4^{-1}ab+1 \leqq 2\mu_1(k)+1 \leqq 4^{-1}3ab+1$ und für $2^{-1}3p+1 < k < 2^{-1}5p$ nimmt $2\mu_1(k)+1$ jeden Wert $2r+1$ $(4^{-1}ab+1 < 2r+1 < 4^{-1}3ab+1)$ genau $2q_{n_{2r+1}}$-mal an, somit nimmt $2\mu_1(k_i)+1$ für $1 \leqq i \leqq \overline{M}$ jeden Wert $2r+1$ $(4^{-1}ab+1 \leqq 2r+1 \leqq 4^{-1}3ab-1)$ genau $(2q_{n_{2r+1}}-1)$-mal an. Daraus folgt, daß $q_{n_{2\mu_1(k_i)+1}}$ für $1 \leqq i \leqq \overline{M}$ jeden Wert $q_{(j-1)a+1}$ $(j=1, \ldots, b)$ genau $4^{-1}a(2q_{(j-1)a+1}-1)$-mal annimmt. Daraus erhalten wir

$$\varrho \geqq 8^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[d_{ab}^2 \sum_{j=1}^{b} a q_{(j-1)a+1} \log^2 \frac{N}{q_{(j-1)a+1}}\right]^{\frac{1}{2}} = 8^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[\sum_{n=1}^{ab} q_n d_{ab}^2 \log^2 \frac{N}{q_n}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 8^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[\sum_{n=1}^{ab} q_n d_{ab}^2 \log^2 \frac{q_1 d_{ab}^2 + \ldots + q_{ab} d_{ab}^2}{q_n d_{ab}^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

somit ist

$$\varrho \geqq 16^{-1}\gamma\sqrt{N}\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2 + \ldots + d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Aus (4. 10) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{\overline{M}} \text{mes}\,(I_i) = \frac{1}{2}. \tag{4.14}$$

Mit geeigneter Einteilung der Intervalle I_i bekommt man paarweise disjunkte Intervalle $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ $(k = 1, \ldots, M)$ mit $\alpha_{k+1} \geqq \beta_k$, für die (4. 3) erfüllt ist. Jede Funktion $f_n(x)$ ist offensichtlich in jedem J_k konstant und auf Grund von (4. 11), (4. 12), (4. 13) und (4. 14) sind (4. 4), (4. 5) und (4. 6) erfüllt. Wegen (4. 10) ist

$$2^{-1}\overline{M}^{-1}\log^{-2}N \leqq \text{mes}\,(I_i) \leqq 2^{-1}\overline{M}^{-1}\log^2 N \qquad (i=1, \ldots, \overline{M}),$$

man kann also M derart wählen, daß auch (4. 2) besteht.

Damit haben wir Hilfssatz VI bewiesen.

Hilfssatz VII. *Es sei ε eine positive Zahl, $a(\geqq 576)$ eine durch 16 teilbare natürliche Zahl, b eine positive ganze Zahl und $\{d_n\}$ $(n=1, \ldots, ab)$ eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge mit $d_{(i-1)a+j} = d_{ia}$ $(j=1, \ldots, a;\ i=1, \ldots, b)$; $m(k)$ bezeichne die Anzahl derjenigen Indizes n, für die $(k-1)d_{ab}^2 < d_n^2 \leqq kd_{ab}^2$ besteht und sei*

$$N = \sum_{k \geqq 1} km(k)(\geqq ab).$$

N ist durch 16 teilbar und im Falle $d_{ab}^2 \geqq A^{-1}d_1^2$ $(A>0)$ gilt $N \leqq ab(A+1)$. Man kann ein im Intervall $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $h_n(x)$ $(n=1, \ldots, ab)$ mit folgender Eigenschaft angeben: Es gilt

$$\int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} h_n(x)\,dx = 0 \qquad (n=1, \ldots, ab);$$

es gibt paarweise disjunkte Intervalle δ_k $(k=1, \ldots, 2M)$ gleicher Länge mit

$$2M \leqq a^2b^2(A+1)^2 \tag{4.15}$$

und

$$\sum_{k=1}^{2M} \operatorname{mes}(\delta_k) = 2, \tag{4.16}$$

jede Funktion $h_n(x)$ ist in jedem δ_k konstant. Weiterhin hat die Summe

$$\sum_{n=1}^{ab} d_n h_n(x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{m=1}^{ab} d_{n_m} h_{n_m}(x)$$

derart, daß es für jedes k $(1 \leqq k \leqq 2M)$ Indizes $m_1(k)$ bzw. $m_2(k)$ gibt, für die im Falle $x \in \delta_k$ $(k = M+1, \ldots, 2M)$ die Funktionswerte $h_{n_{2\mu-1}}(x)$ $(\mu=1, \ldots, m_1(k))$ positiv und im Falle $x \in \delta_k$ $(k=1, \ldots, M)$ die Funktionswerte $h_{n_{2\mu}}(x)$ $(\mu=m_2(k), \ldots, 2^{-1}ab)$ positiv sind und

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(k)} d_{n_{2\mu-1}} h_{n_{2\mu-1}}(x) \geqq R\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2+\ldots+d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{\mu=m_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} h_{n_{2\mu}}(x) \geqq R\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2+\ldots+d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

gelten, wobei R eine von ε, a, b, $\{d_n\}$ und x unabhängige positive Konstante ist.

Beweis des Hilfssatzes VII. Die Bezeichnungen des Hilfssatzes VI wollen wir beibehalten. Es sei $\sigma = \min(\operatorname{mes}(J_1), \ldots, \operatorname{mes}(J_M))$. Wir setzen $\bar{\delta}_k = (\alpha_k, \alpha_k+\sigma)$ $(k=1, \ldots, M)$. Diese sind paarweise disjunkte Intervalle gleicher Länge und wegen (4. 3), (4. 4) gilt

$$1 > S = \sum_{k=1}^{M} \operatorname{mes}(\bar{\delta}_k) \geqq 4^{-1}.$$

Mit $\bar{\bar{\delta}}_k$ $(k=1, \ldots, M+1)$ bezeichnen wir der Reihe nach die Intervalle $[0, \alpha_1]$, $[\alpha_1+\sigma, \alpha_2], \ldots, [\alpha_{M-1}+\sigma, \alpha_M], [\alpha_M+\sigma, 1]$. Es sei $w_0=0$, $w_l=\alpha_l+\sigma$ $(l=1, \ldots, M)$ und

$$z_l = 1+\frac{\varepsilon}{1-S}\sum_{k=1}^{l} \operatorname{mes}(\bar{\bar{\delta}}_k) \qquad (l=0, \ldots, M+1).$$

Wir setzen

$$h_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{S}{2}}\, f_n(S(x-S^{-1}(l-1)\sigma)+\alpha_l), & S^{-1}(l-1)\sigma \leqq x < S^{-1}l\sigma \quad (l=1, \ldots, M), \\ \sqrt{\dfrac{1-S}{2\varepsilon}}\, f_n\!\left(\dfrac{1-S}{\varepsilon}(x-z_{l-1})+w_{l-1}\right), & z_{l-1} \leqq x < z_l \quad (l=1, \ldots, M+1), \end{cases}$$

$h_n(x) = -h_n(-x)$ für $-1-\varepsilon<x<0$ $(n=1, \ldots, ab)$. Weiterhin bezeichne δ_k für $k=M+1, \ldots, 2M$ die Intervalle $(S^{-1}(k-M-1)\sigma, S^{-1}(k-M)\sigma)$, während für $k=1, \ldots, M$ das durch die Transformation $x=-y$ entstehende Bild von δ_k $(k=2M, 2M-1, \ldots, M+1)$.

Auf Grund des Hilfssatzes VI sind alle Bedingungen des Hilfssatzes VII für diese Funktionen und Intervalle offensichtlich erfüllt.

Es sei nun $I=[u, v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$h_n(I; x) = \begin{cases} h_n\!\left(2\dfrac{1+\varepsilon}{v-u}x-(1+\varepsilon)\dfrac{v+u}{v-u}\right), & u<x<v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, ab)$; $\delta_k(I)$ bezeichne das durch die Transformation $x=\dfrac{v-u}{2(1+\varepsilon)}y+\dfrac{v+u}{2}$ in $[u, v]$ entstehende Bild von δ_k. Offensichtlich gelten die Beziehungen

$$\operatorname{mes}(\delta_k(I)) = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)}\operatorname{mes}(\delta_k), \tag{4.17}$$

$$\int_u^v h_n(I; x)h_m(I; x)\,dx = \frac{\operatorname{mes}(I)}{2(1+\varepsilon)}\int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} h_n(I; x)h_m(I; x)\,dx \tag{4.18}$$

und

$$\int_u^v h_n(I; x)\,dx=0 \qquad (n=1, \ldots, ab), \tag{4.19}$$

weiterhin gibt es für jedes k $(1\leqq k\leqq 2M)$ von k abhängige Indizes $m_1(k)$ bzw. $m_2(k)$ derart, daß im Falle $x\in\delta_k$ die Funktionswerte $h_{n_{2\mu-1}}(I; x)$ $(\mu=1, \ldots, m_1(k))$ oder die Funktionswerte $h_{n_{2\mu}}(I; x)$ $(\mu=m_2(k), \ldots, 2^{-1}ab)$ positiv sind und die Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(k)} d_{n_{2\mu-1}}h_{n_{2\mu-1}}(I; x) \geqq Q\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2\log^2\frac{d_1^2+\ldots+d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.20}$$

oder

$$\sum_{\mu=m_2(k)}^{2^{-1}ab} d_{n_{2\mu}} h_{n_{2\mu}}(I;\ x) \geqq Q\left[\sum_{n=1}^{ab} d_n^2 \log^2 \frac{d_1^2+\ldots+d_{ab}^2}{d_n^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

mit einer positiven, von a, b, $\{d_n\}$ und x unabhängigen Konstante Q bestehen.

Es seien $(4 \leqq) r_1 < \ldots < r_i < \ldots$ ganze Zahlen und $\{c_n\}$ eine positive, monoton abnehmende Zahlenfolge, für welche die Bedingungen $c_{\nu_{r_{i+1}}} \geqq A_i^{-1} c_{\nu_{r_i}}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und

$$\nu_{r_{i+1}} \geqq \nu_{r_i}^9 (A_i+1)^4 \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{4.22}$$

mit positiven A_i erfüllt sind. Wir werden zwei Folgen $\{\bar{N}_i\}$, $\{\bar{M}_i\}$ von natürlichen Zahlen mit

$$\bar{N}_i \leqq \nu_{r_i}^4 (A_i+1)^2 \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{4.23}$$

und

$$\bar{M}_i \geqq \nu_{r_i - 1} \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{4.24}$$

definieren. Es sei $\bar{M}_1 = \nu_{r_1}$. Wir wenden den Hilfssatz VI mit $a=\bar{M}_1$, $b=\nu_{r_1}-1$, $d_{(l-1)\bar{M}_1+j} = c_{(l+1)\nu_{r_1}}$ $(l=1, \ldots, \nu_{r_1}-1; j=1, \ldots, \nu_{r_1})$ an. Die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\bar{N}_1$. Nach (4. 15) ist (4. 23) erfüllt. Sind die Zahlen $\bar{M}_1, \ldots, \bar{M}_{i_0-1}$, $\bar{N}_1, \ldots, \bar{N}_{i_0-1}$ $(i_0>1)$ derart definiert, daß die Beziehungen (4. 23) und (4. 24) für $i=1, \ldots, i_0-1$ bestehen, so sei $\bar{M}_{i_0}$ jene mit 16 teilbare natürliche Zahl, für welches $\bar{N}_{i_0-1}^{-1} \nu_{r_{i_0}} - 16 < \bar{M}_{i_0} \leqq \bar{N}_{i_0-1}^{-1} \nu_{r_{i_0}}$ gilt. Wegen (4. 22) und der Induktionsannahme ist (4. 24) für $i=i_0$ erfüllt. Dann wenden wir den Hilfssatz VI mit $a=\bar{M}_{i_0}$, $b=\nu_{r_{i_0}}-1$, $d_{(l-1)\bar{M}_{i_0}+j} = c_{(l+1)\nu_{r_{i_0}}}$ $(l=1, \ldots, \nu_{r_{i_0}}-1;\ j=1, \ldots, \bar{M}_{i_0})$ an; die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\bar{\bar{N}}_{i_0}$. Es sei $\bar{N}_{i_0} = \bar{\bar{N}}_{i_0} \bar{N}_{i_0-1}$. Nach (4. 15) ist (4. 23) auch für $i=i_0$ erfüllt. Die Folgen $\{\bar{N}_i\}$, $\{\bar{M}_i\}$ ergeben sich somit durch Induktion.

Hilfssatz VIII. *Es sei $\{r_i\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen $(4 \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_i < \ldots)$ und $\{c_n\}$ eine positive monoton abnehmende Zahlenfolge: wir nehmen an, daß $c_{\nu_{r_{i+1}}} \geqq A_i^{-1} c_{\nu_{r_i}}$ $(i=1, 2, \ldots)$ und (4. 22) mit positiven A_i erfüllt sind. $\{\bar{M}_i\}$, $\{\bar{N}_i\}$ seien Folgen von natürlichen Zahlen (definiert wie in obigen), für die (4. 23), (4. 24) erfüllt sind, die $\bar{M}_i$ seien außerdem durch 16 teilbar $(i=1, 2, \ldots,)$. Es seien i_0 (>1), a^* natürliche Zahlen. Man kann ein im Intervall [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\varphi_n(i_0, a^*; x) = \varphi_n(a^*; x)$ $(\nu_{r_i} < n \leqq \nu_{r_i} + (\nu_{r_i}-1) \bar{M}_i \bar{N}_{i-1};\ i_0 \leqq i \leqq i_0 + a^*)$ mit folgenden Eigenschaften angeben:*

Es gilt

$$\int_0^1 \varphi_n(a^*; x)\, dx = 0; \tag{4.25}$$

es gibt $\bar{N}_{i_0+a^*}$ paarweise disjunkte Intervalle $I_l(a^*)$ $(\subseteq [0, 1])$ gleicher Länge mit

$$\sum_{l=1}^{\bar{N}_{i_0+a^*}} \operatorname{mes}(I_l(a^*)) > \frac{1}{2}; \tag{4.26}$$

es gibt ferner eine Anordnung

$$\sum_{k=1}^{(\nu_{n_{i_0}}-1)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\dots+(\nu_{r_{i_0+a^*}}-1)\overline{M}_{i_0+a^*}\overline{N}_{i_0+a^*-1}} c_{n_k}\varphi_{n_k}(a^*;x)$$

der Summe

$$\sum_{i=0}^{a^*}\ \sum_{n=\nu_{r_{i_0+i}}+1}^{\nu_{r_{i_0+i}}+(\nu_{r_{i_0+i}}-1)\overline{M}_{i_0+i}\overline{N}_{i_0+i-1}} c_n\varphi_n(a^*;x)$$

derart, daß für alle Indizes l natürliche Zahlen $k_1(l)$, $k_2(l)$ existieren, so daß die Funktionswerte $\varphi_{n_k}(a^*;x)$ $(k_1(l)\leqq k\leqq k_2(l))$ nicht-negativ sind und die untere Abschätzung

$$(4.27)\qquad \sum_{k=k_1(l)}^{k_2(l)} c_{n_k}\varphi_{n_k}(a^*;x)\geqq \eta\sum_{i=i_0}^{i_0+a^*} 2^{r_i}\left[\overline{N}_{i-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_i}-1}\overline{M}_i c^2_{(m+1)\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}}\qquad (x\in I_l(a^*))$$

mit einer von i_0, a^*, x und von der Folge $\{c_n\}$ unabhängigen positiven Konstante η gilt. Außerdem ist jede Funktion $\varphi_n(a^*;x)$ in jedem $I_l(a^*)$ konstant.

B e w e i s d e s H i l f s s a t z e s VIII. Wir werden durch Induktion nach a^* schließen. Wir zeigen zuerst die Behauptung für $a^*=0$. Es sei ε_{i_0} (<1) eine positive Zahl. Wir teilen das Intervall $[0,1]$ in $\overline{N}_{i_0-1}$ Teilintervalle I_λ^* $(\lambda=1,\dots,\overline{N}_{i_0-1})$ gleicher Länge. Wir wenden den Hilfssatz VII mit $\varepsilon=\varepsilon_{i_0}$, $a=\overline{M}_{i_0}$, $b=\nu_{r_{i_0}}-1$ und $d_{(i-1)\overline{M}_{i_0}+j}=c_{(i+1)\nu_{r_{i_0}}}$ $(i=1,\dots,\nu_{r_{i_0}}-1;\, j=1,\dots,\overline{M}_{i_0})$ an; die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\overline{\overline{N}}_{i_0}$. Es sei weiterhin $I_{k+(\lambda-1)\overline{\overline{N}}_{i_0}}(0)=\delta_k(I_\lambda^*)$ $(k=1,\dots,\overline{\overline{N}}_{i_0};\ \lambda=1,\dots,\overline{N}_{i_0-1})$.

Für jedes λ $(\lambda=1,\dots,\overline{N}_{i_0-1})$ bedeutet Z_λ die geordnete Menge der natürlichen Zahlen

$$\nu_{r_{i_0}}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots,\ \nu_{r_{i_0}}+\lambda\overline{M}_{i_0},$$

$$\nu_{r_{i_0}}+\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots$$

$$\dots,\ \nu_{r_{i_0}}+\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\lambda\overline{M}_{i_0},$$

$$\nu_{r_{i_0}}+2\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+2\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots$$

$$\dots,\ \nu_{r_{i_0}}+2\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\lambda\overline{M}_{i_0},\ \dots,\ \nu_{r_{i_0}}+(\nu_{r_{i_0}}-2)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+1,\ \nu_{r_{i_0}}+$$

$$+(\nu_{r_{i_0}}-2)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+(\lambda-1)\overline{M}_{i_0}+2,\ \dots,\ \nu_{r_{i_0}}+(\nu_{r_{i_0}}-2)\overline{M}_{i_0}\overline{N}_{i_0-1}+\lambda\overline{M}_{i_0}$$

und werden die Funktionen

$$\left[\frac{2(1+\varepsilon_{i_0})}{\operatorname{mes}(I_\lambda^*)}\right]^{\frac{1}{2}} h_m(I_\lambda^*;x)\qquad (m=1,\dots,(\nu_{r_{i_0}}-1)\overline{M}_{i_0})$$

der Reihe nach mit $\varphi_n(0;x)$ $(n\in Z_\lambda)$ bezeichnet.

Wegen (4. 18) bilden diese Treppenfunktionen in [0, 1] ein orthonormiertes System. Wegen (4. 19) ist (4. 25) für $\nu_{r_{i_0}} < n \leqq \nu_{r_{i_0}} + (\nu_{r_{i_0}} - 1)\bar{M}_{i_0}\bar{N}_{i_0-1}$ erfüllt. Jede Funktion $\varphi_n(0; x)$ ist in jedem $I_l(0)$ konstant. Wegen (4. 16) und (4. 17) ist (4. 26) für $a^* = 0$ erfüllt. Es sei λ eine natürliche Zahl ($1 \leqq \lambda \leqq \bar{N}_{i_0-1}$). Nach dem Hilfssatz VIII können wegen (4. 20) oder (4. 21) (wo die Glieder der Summen positiv sind), wegen der Monotonie der Folge $\{c_n\}$ und wegen (4. 24) die Funktionen $\varphi_n(0; x)$ $(n \in Z_\lambda)$ in eine Anordnung $\varphi_{n(k,\lambda)}(0; x)$ $(k = 1, \dots, (\nu_{r_{i_0}} - 1)\bar{M}_{i_0})$ gestellt werden derart, daß für jedes l $((\lambda-1)\bar{\bar{N}}_{i_0} < l \leqq \lambda\bar{\bar{N}}_{i_0})$ Indizes $m_1(l)$ oder $m_2(l)$ existieren, für welche die Abschätzungen

$$\sum_{\mu=1}^{m_1(l)} c_{n(2\mu-1,\lambda)}\varphi_{n(2\mu-1,\lambda)}(0; x) \geqq \eta 2^{r_{i_0}}\left[\bar{N}_{i_0-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0}}-1}\bar{M}_{i_0}c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in I_l(0))$$

oder

$$\sum_{\mu=m_2(l)}^{2^{-1}(\nu_{r_{i_0}}-1)\bar{M}_{i_0}} c_{n(2\mu,\lambda)}\varphi_{n(2\mu,\lambda)}(0; x) \geqq \eta 2^{r_{i_0}}\left[N_{i_0-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0}}-1}\bar{M}_{i_0}c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in I_l(0))$$

mit $\eta = (2\sqrt{2})^{-1}Q$ gelten. Daraus ergibt sich unmittelbar, daß (4. 27) in einer gewissen Anordnung für $a^* = 0$ erfüllt ist.

Es sei $\alpha(>1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Behauptung für $a^* = \alpha - 1$ schon bewiesen ist. Es sei $\varepsilon_{i_0+\alpha}(<1)$ eine positive Zahl, für die

$$\text{(4.28)} \qquad \sum_{l=1}^{\bar{N}_{i_0+\alpha-1}} \operatorname{mes}(I_l(\alpha-1))\frac{1}{1+\varepsilon_{i_0+\alpha}} > \frac{1}{2}$$

besteht. (Nach (4. 26) existiert ein solches $\varepsilon_{i_0+\alpha}$.) Wir wenden den Hilfssatz VII mit $\varepsilon = \varepsilon_{i_0+\alpha}$, $a = \bar{M}_{i_0+\alpha}$, $b = \nu_{r_{i_0+\alpha}} - 1$ und $d_{(i-1)\bar{M}_{i_0+\alpha}+j} = c_{(i+1)\nu_{r_{i_0+\alpha}}}$ $(i = 1, \dots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} - 1;$ $j = 1, \dots, \bar{M}_{i_0+\alpha})$ an; die so erhaltenen Funktionen bezeichnen wir mit $\bar{h}_m(x)$ $(m = 1, \dots, (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 1)\bar{M}_{i_0+\alpha})$ und die entsprechende Zahl $2M$ bezeichnen wir mit $\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}$. Es sei $I_{k+(\lambda-1)\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}}(\alpha) = \delta_k(I_\lambda(\alpha-1))$ $(k = 1, \dots, \bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}; \lambda = 1, \dots, \bar{N}_{i_0+\alpha-1})$ und

$$\varphi_n(\alpha; x) = \varphi_n(\alpha-1; x)\ (\nu_{r_i} < n \leqq (\nu_{r_i} - 1)\bar{M}_i\bar{N}_{i-1}; \quad i = i_0, \dots, i_0+\alpha-1).$$

Für jedes λ $(\lambda = 1, \dots, \bar{N}_{i_0+\alpha-1})$ bedeutet $Z_\lambda^{(\alpha)}$ die geordnete Menge der natürlichen Zahlen

$$\nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\ \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \dots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + \lambda\bar{M}_{i_0+\alpha},$$

$$\nu_{r_{i_0+\alpha}} + \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\ \nu_{r_{i_0+\alpha}} + \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \dots$$
$$\dots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + \lambda\bar{M}_{i_0+\alpha},$$

$$\nu_{r_{i_0+\alpha}} + 2\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\ \nu_{r_{i_0+\alpha}} + 2\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \dots$$
$$\dots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + 2\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + \lambda\bar{M}_{i_0+\alpha}, \dots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 2)\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} +$$
$$+ (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 1,\ \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 2)\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + (\lambda-1)\bar{M}_{i_0+\alpha} + 2, \dots$$
$$\dots, \nu_{r_{i_0+\alpha}} + (\nu_{r_{i_0+\alpha}} - 2)\bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1} + \lambda\bar{M}_{i_0+\alpha}$$

und werden die Funktionen

$$\left[\frac{2(1+\varepsilon_{i_0+\alpha})}{\operatorname{mes}(I_\lambda(\alpha-1))}\right]^{\frac{1}{2}} \bar{h}_m(I_\lambda(\alpha-1);\, x) \qquad (m=1, \ldots, (\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\bar{M}_{i_0+\alpha})$$

der Reihe nach mit $\varphi_n(\alpha; x)$ $(n\in Z_\lambda^{(\alpha)})$ bezeichnet. Wegen (4. 18) und (4. 19) bilden die Treppenfunktionen $\varphi_n(\alpha; x)$ $(\nu_{r_i}<n \leqq \nu_{r_i}+(\nu_{r_i}-1)\bar{M}_i\bar{N}_{i-1};\ i=i_0, \ldots, i_0+\alpha)$ in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System. Wegen (4.19) ist (4. 25) auch für die Indizes n mit $\nu_{r_{i_0+\alpha}}<n \leqq \nu_{r_{i_0+\alpha}}+(\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\, \bar{M}_{i_0+\alpha}\bar{N}_{i_0+\alpha-1}$ erfüllt. Jede Funktion $\varphi_n(\alpha; x)$ ist in jedem $I_l(\alpha)$ konstant. Wegen (4. 16), (4. 17) und (4. 28) ist (4. 26) für $a^*=\alpha$ erfüllt. Es sei λ eine natürliche Zahl $(1\leqq\lambda\leqq\bar{N}_{i_0+\alpha-1})$. Nach dem Hilfssatz VII können wegen (4. 20) oder (4. 21) (wo die Glieder der Summen positiv sind), wegen der Monotonie der Folge $\{c_n\}$ und wegen (4. 24) die Funktionen $\varphi_n(\alpha; x)$ $(n\in Z_\lambda^{(\alpha)})$ in eine Anordnung $\varphi_{\bar{n}(k,\lambda)}(\alpha; x)$ $(k=1, \ldots, (\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\bar{M}_{i_0+\alpha})$ gestellt werden derart, daß für jedes l $((\lambda-1)\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha}<l\leqq\lambda\bar{\bar{N}}_{i_0+\alpha})$ Indizes $\bar{m}_1(l)$ oder $\bar{m}_2(l)$ existieren, für die die Ungleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{\bar{m}_1(l)} c_{\bar{n}(2\mu-1,\lambda)}\varphi_{\bar{n}(2\mu-1,\lambda)}(\alpha;\, x)\geqq\eta 2^{r_{i_0+\alpha}}\left[\bar{N}_{i_0+\alpha-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1}\bar{M}_{i_0+\alpha}c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0+\alpha}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in I_l(\alpha))$$

und

$$\sum_{\mu=\bar{m}_2(l)}^{2^{-1}(\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1)\bar{M}_{i_0+\alpha}} c_{\bar{n}(2\mu,\lambda)}\varphi_{\bar{n}(2\mu,\lambda)}(\alpha;\, x)\geqq\eta 2^{r_{i_0+\alpha}}\left[\bar{N}_{i_0+\alpha-1}\sum_{m=1}^{\nu_{r_{i_0+\alpha}}-1}\bar{M}_{i_0+\alpha}c^2_{(m+1)\nu_{r_{i_0+\alpha}}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in I_l(\alpha))$$

mit $\eta=(2\sqrt{2})^{-1}Q$ bestehen. Daraus und aus der Induktionsannahme kann mit der im Beweis des Hilfssatzes III angewendeten Methode bewiesen werden, daß (2. 27) auch für $a^*=\alpha$ gilt.

Damit haben wir den Hilfssatz VIII bewiesen.

Nach dem Hilfssatz VIII sind die Funktionen $\varphi_n(a^*; x)$ $(\nu_{r_i}<n\leqq(\nu_{r_i}-1)\bar{M}_i\bar{N}_{i-1};$ $i=i_0, \ldots, i_0+a^*)$ Treppenfunktionen. Daher kann das Intervall $[0, 1]$ in endlichviele Teilintervalle $J_t^*=(\alpha_t^*, \beta_t^*)$ $(t=1, \ldots, \tau)$ eingeteilt werden, derart, daß jede Funktion $\varphi_n(a^*; x)$ in jedem J_t^* konstant ist. Für jene Indizes n $(\nu_{r_{i_0}}<n\leqq\nu_{r_{i_0+a^*+1}})$, für welche die Funktionen $\varphi_n(a^*; x)$ noch nicht definiert sind, setzen wir $\varphi_n(a^*; x)$ der Reihe nach gleich den Funktionen

$$\sum_{t=1}^{\tau} \operatorname{sign} \sin 2^q\pi\, \frac{x-\alpha_t^*}{\beta_t^*-\alpha_t^*} \qquad (q=1, 2, \ldots).$$

Wir betrachten die folgende Anordnung der Funktionen $\varphi_n(a^*; x)$ $(\nu_{r_{i_0}}<n\leqq\nu_{r_{i_0+a^*+1}})$: wir stellen die Funktionen $\varphi_n(a^*; x)$ $(\nu_{r_i}<n\leqq\nu_{r_i}+(\nu_{r_i}-1)\ \bar{M}_i\bar{N}_{i-1};\ i=i_0, \ldots, i_0+a^*)$ in der im Hilfssatz VIII angegebenen Anordnung, während die anderen $\varphi_n(a^*; x)$ nach diesen in beliebiger Anordnung folgen.

Aus dem Hilfssatz VIII ergibt sich mithin der

Hilfssatz IX. *Wir nehmen an, daß die Bedingungen des Hilfssatzes VIII erfüllt sind. Dann kann man ein im Intervall* [0, 1] *orthonormiertes System von Treppenfunktionen* $\varphi_n(i_0, a^*; x)$ $(\nu_{r_{i_0}} < n \leqq \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ *mit folgenden Eigenschaften angeben:*

$$\int_0^1 \varphi_n(i_0, a^*; x)\, dx = 0$$

und es gibt eine einfache Menge E mit

$$\operatorname{mes}(E) > \frac{1}{2} \tag{4.29}$$

und eine Anordnung

$$\sum_{k=\nu_{r_{i_0}}+1}^{\nu_{r_{i_0+a^*+1}}} c_{n_k} \varphi_{n_k}(i_0, a^*; x)$$

der Summe

$$\sum_{n=\nu_{r_{i_0}}+1}^{\nu_{r_{i_0+a^*+1}}} c_n \varphi_n(i_0, a^*; x)$$

derart, daß für jedes $x \in E$

$$\sum_{k=\varkappa_1(x)}^{\varkappa_2(x)} c_{n_k} \varphi_{n_k}(i_0, a^*; x) \geqq \eta \sum_{i=i_0}^{i_0+a^*} 2^{r_i} \left[\bar{N}_{i-1} \sum_{m=1}^{\nu_{r_i}-1} \bar{M}_i c^2_{(m+1)\nu_{r_i}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

mit gewissen $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$ $(\nu_{r_{i_0}} < \varkappa_1(x) < \varkappa_2(x) \leqq \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ *gilt.*

Es sei $I = [u, v]$ ein endliches Intervall. Wir setzen

$$\varphi_n(i_0, a^*, I; x) = \begin{cases} \varphi_n\left(i_0, a^*; \dfrac{x-u}{v-u}\right), & u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n = \nu_{r_{i_0}} + 1, \ldots, \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ und bezeichnen mit $E(I)$ das durch die Transformation $x = (v-u)y + u$ enstehende Bild von E in $[u, v]$. Offensichtlich bestehen dei Beziehungen

$$\operatorname{mes}(E(I)) = \operatorname{mes}(I) \operatorname{mes}(E), \tag{4.30}$$

$$\int_u^v \varphi_n(i_0, a^*, I; x)\, dx = 0 \tag{4.31}$$

und

$$\int_u^v \varphi_n(i_0, a^*, I; x) \varphi_m(i_0, a^*, I; x)\, dx = \operatorname{mes}(I) \int_u^v \varphi_n(i_0, a^*; x) \varphi_m(i_0, a^*; x)\, dx. \tag{4.32}$$

Weiterhin gibt es für $x \in E(I)$ von x abhängige natürliche Zahlen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$ $(\nu_{r_{i_0}} < \varkappa_1(x) < \varkappa_2(x) \leqq \nu_{r_{i_0+a^*+1}})$ mit

$$\sum_{k=\varkappa_1(x)}^{\varkappa_2(x)} c_{n_k} \varphi_{n_k}(i_0, a^*, I; x) \geqq \eta \sum_{i=i_0}^{i_0+a^*} 2^{r_i} \left[\bar{N}_{i-1} \sum_{m=1}^{\nu_{r_i}-1} \bar{M}_i c^2_{(m+1)\nu_{r_i}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (x \in E(I)). \tag{4.33}$$

§ 5. Beweis des Satzes II im Falle $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{\nu_k} a_{\nu_k} 2^k < \infty$

Für jedes k bezeichne p_k die kleinste natürliche Zahl p, für die $a^2_{\nu_{k+1}} \geqq \geqq \nu^{-1}_{k+p+1} a^2_{\nu_k+1}$ besteht. Mit $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ bezeichnen wir die Indizes, für die $p_{k_m} > 2$ $(m = 1, 2, \ldots)$ gilt. Dann ist nach Annahme

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_{k_m}-2} \left[\sum_{n=\nu_{k_m+i}+1}^{\nu_{k_m+i+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} &\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p_{k_m}-2} 2^{k_m+p_{k_m}} a_{\nu_{k_m+i+1}} \sqrt{\nu_{k_m+i+1}} \leqq \\ &\leqq \sum_{m=1}^{\infty} p_{k_m} 2^{k_m+p_{k_m}} \sqrt{\nu_{k_m}} a_{\nu_{k_m}} \left[\frac{\nu_{k_m+p_{k_m}-1}}{\nu_{k_m} \nu_{k_m+p_{k_m}}} \right]^{\frac{1}{2}} = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\nu_k}\, a_{\nu_k} 2^k < \infty. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es seien $l_1 < l_2 < \ldots < l_m < \ldots$ die von ν_{k_m+i} $(i = 1, \ldots, p_{k_m} - 2;\ m = 1, 2, \ldots)$ ver schiedenen natürlichen Zahlen. Dann ist $a^2_{\nu_{l_m+1}} \geqq \nu^{-1}_{l_m+3} a^2_{\nu_{l_m}+1}$ oder, im Falle $a^2_{\nu_{l_m+1}} \geqq \nu^{-1}_{l_m+p_{l_m}+1} a^2_{\nu_{l_m}+1}$ $(p_{l_m} > 2)$, gilt $l_{m+1} \geqq l_m + p_{l_m} - 1$; es sei $\bar{A}_m = \nu_{l_m+3}$ bzw. $\bar{A}_m = \nu_{l_m+p_{l_m}+1}$.

Wir nehmen an, daß (4) erfüllt ist. Dann gilt wegen (5.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_{l_m}+1}^{\nu_{l_m+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Daraus folgt

$$\sum_{s=0}^{5} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_{l_{5m+s}}+1}^{\nu_{l_{5m+s}+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Es gibt also eine ganze Zahl s_0 $(0 \leqq s_0 \leqq 4)$, für die

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_{l_{6m+s_0}}+1}^{\nu_{l_{5m+s_0}+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} = \infty$$

besteht. Die Zahlen $l_{6+s_0}, l_{26+s_0}, \ldots, l_{i6+s_0}, \ldots$ bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$. Für diese Folge ist (4.22) mit $A_i = \bar{A}_{s_i+s_0}$ offensichtlich erfüllt und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{n=\nu_{r_i}+1}^{\nu_{r_i+1}} a_n^2 \log^2 n \right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Daraus ergibt sich wegen der Annahme und wegen der Monotonie der Folge $\{a_n\}$ die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{r_i}\left[\nu_{r_i}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1} a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1}\frac{\nu_{r_i}}{\bar{N}_{i-1}} a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} = \infty,$$

wo $\bar{N}_{i-1}$ auf der Seite 214 definiert ist. Da $\bar{M}_i \geqq 2^{-1}N_{i-1}^{-1}\nu_{r_i}$ gilt ($\bar{M}_i$ ist auch auf der Seite 214 definiert), ergibt sich endlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1}\bar{M}_i a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Also gibt es eine im strengen Sinne wachsende Indexfolge $\{N_m\}$ $(N_0=0)$, so daß

$$\sum_{i=N_m+1}^{N_{m+1}} 2^{r_i}\left[\bar{N}_{i-1}\sum_{j=1}^{\nu_{r_i}-1}\bar{M}_i a^2_{\nu_{r_i}+j\nu_{r_i}}\right]^{\frac{1}{2}} \geqq 1 \qquad (m=0, 1, \ldots). \tag{5.2}$$

Durch Induktion werden wir ein in [0, 1] orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ von Treppenfunktionen und eine Folge von einfachen Mengen $F_m(\subseteqq[0, 1])$ mit folgenden Eigenschaften definieren:

a) Die Mengen E_m $(m=0, 1, \ldots)$ sind stochastisch unabhängig und für jedes m ist

$$\operatorname{mes}(E_m) > \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

b) Für jedes m gibt es eine Anordnung

$$\sum_{k=\nu_{r_{N_m+1}}+1}^{\nu_{r_{N_{m+1}+1}}} a_{n_k}\Phi_{n_k}(x)$$

der Summe

$$\sum_{n=\nu_{r_{N_m+1}}+1}^{\nu_{r_{N_{m+1}+1}}} a_n\Phi_n(x)$$

derart, daß für jedes $x\in E_m$ Indizes $n_m(x)$, $m_m(x)$ $(\nu_{r_{N_m+1}} < n_m(x) < m_m(x) \leqq \nu_{r_{N_{m+1}+1}})$ gibt mit

$$\sum_{k=n_m(x)}^{m_m(x)} a_{n_k}\Phi_{n_k}(x) \geqq \eta\,(>0). \tag{5.4}$$

Es sei

$$\Phi_n(x) = \operatorname{sign}\sin 2^n\pi x \qquad (n=1, \ldots, \nu_{r_1}).$$

Dann kann das Intervall [0, 1] in endlichviele Teilintervalle I_s $(s=1, \ldots, \sigma)$ eingeteilt werden derart, daß jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu_{r_1})$ in jedem I_s konstant ist. Wenden wir den Hilfssatz IX mit $i_0=0$, $a^*=N_1$ an. Wir setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{s=1}^{\sigma}\varphi_n(1, N_1, I_s; x) \qquad (\nu_{r_1} < n \leqq \nu_{r_{N_1+1}})$$

und

$$E_0 = \bigcup_{s=1}^{\sigma} E(I_s).$$

Nach (4. 31) und (4. 32) bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{r_{N_1+1}})$ in [0, 1] ein orthonormiertes System. Nach (4. 29) und (4. 30) ist (5. 3) für $m=0$ erfüllt. Wegen (4. 32) und (5. 2) ist es klar, daß auch b) für $m=0$ erfüllt ist.

Es sei nun m_0 (>1) eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu_{r_{N_{m_0-1}+1}})$ und die einfachen Mengen $E_0, \ldots, E_{m_0-1}$ schon derart definiert sind, daß a) und b) für $m=0, \ldots, m_0-1$ erfüllt sind. Dann kann man das Intervall [0, 1] in endlichviele Teilintervalle J_t $(t=1, \ldots, \tau)$ einteilen, derart, daß jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n < \nu_{r_{N_{m_0-1}+1}})$ in jedem J_t konstant ist und jede Menge E_m $(0 \leqq m \leqq m_0-1)$ die Vereinigung gewisser J_t ist. Wir wenden den Hilfssatz IX mit $i_0 = N_{m_0-1}$, $a = N_{m_0} - N_{m_0-1}$ an und setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{t=1}^{\tau} \varphi_n(N_{m_0-1}, N_{m_0} - N_{m_0-1}, J_t; x) \qquad (\nu_{r_{N_{m_0-1}+1}} < n \leqq \nu_{r_{N_{m_0}+1}})$$

und

$$E_{m_0} = \bigcup_{t=1}^{\tau} E(J_t).$$

Nach (4. 31) und (4. 32) bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq \nu_{r_{N_{m_0}+1}})$ in [0, 1 ein orthonormiertes System. Nach (4. 29) und (4. 30) ist (5. 3) für $m=m_0$ erfüllt. Wegen (4. 33) und (5. 2) ist es klar, dass auch b) für $m=0, \ldots, m_0$ besteht. Die Mengen $E_0, \ldots, E_{m_0}$ sind offensichtlich stochastisch unabhängig.

Das angekündigte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{E_m\}$ mit den erwähnten Eigenschaften ergibt sich mithin durch Induktion.

Wir betrachten die in b) angegebene Anordnung

$$\text{(5. 5)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \Phi_{n_k}(x) \qquad (\text{für } 1 \leqq k \leqq \nu_{r_1} \text{ ist } n_k = k)$$

der Reihe (5). Ist $x \in \overline{\lim_{m\to\infty}} E_m$, so gilt (5. 4) für unendlich viele m. Daraus folgt, daß die Reihe (5. 5) im Punkt x divergiert. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Mengenfolge $\{E_m\}$ und wegen (5. 3) folgt durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas

$$\operatorname{mes}\left(\overline{\lim_{m\to\infty}} E_m\right) = 1;$$

d. h. die Reihe (5. 5) divergiert fast überall.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 1. Juni 1961)

Non-summable partial sums of orthogonal series

By DAN J. EUSTICE in Urbana (Illinois, USA)

Introduction

Let $\{\Phi_n(x)\}$ be an orthonormal system on [0, 1] and let $\{S_n(x)\}$ denote the sequence of partial sums of $\sum a_n\Phi_n(x)$, where $\sum a_n^2<\infty$. It will be shown that the Riesz summability, $R(\lambda, 1)$, almost everywhere of $\{S_n(x)\}$ does not necessarily imply the $R(\lambda, 1)$-summability of every subsequence of $\{S_n(x)\}$. A condition on the index set $\{n_k\}$ implying the $R(\lambda, 1)$-summability a. e. of $\{S_{n_k}(x)\}$ if $\{S_n(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e. will also be demonstrated.

Let λ_n be a positive, strictly increasing function with $\lambda_0=0$ and $\lambda_n\to+\infty$ as $n\to+\infty$. Then $\{S_n\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable if σ_n converges, where

$$\sigma_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)S_k.$$

ZYGMUND [8] has shown that if the coefficients $\{a_n\}$ are such that

$$\sum a_n^2(\log\log\lambda_n)^2<\infty, \tag{1}$$

then $\{S_n(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e. It was recently shown ([1], [4]) that condition (1) implies every subsequence of $\{S_n(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e.

The following result is a generalization of a theorem of K. TANDORI [6] for $(C, 1)$-summability.

Theorem 1. *Let $R(\lambda, 1)$-summability be a Riesz method stronger than convergence. There exists an orthonormal system $\{\Phi_n(x)\}$, a sequence $\{a_n\}$ with $\sum a_n^2<\infty$, and an index set $\nu=\{\nu_k\}$ such that the sequence of partial sums $\{S_n(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e. but $\{S_{\nu_n}(x)\}$ is nowhere $R(\lambda, 1)$-summable.*

The existence of such an example was recently conjectured by J. MEDER [4].

Theorem 2. *Let the sequence of partial sums $\{S_n(x)\}$ of an orthogonal expansion with $\sum a_n^2<\infty$ be $R(\lambda, 1)$-summable a. e. Then, if $\nu=\{\nu_k\}$ is an index set such that*

$$\lambda_{\nu_j}^2\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}\lambda_{\nu_k}^2}=O(1) \tag{2}$$

as $j\to\infty$, where $\Delta\lambda_k=\lambda_{k+1}-\lambda_k$, the sequence of partial sums $\{S_{\nu_k}(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e.

This is a generalization of a result of ZALCWASSER [7] for $(C, 1)$-summability.

1. Proof of Theorem 1

The proof of Theorem 1 depends on two lemmas. For any index set $\nu=\{\nu_k\}$, let

(3) $$\sigma_{\nu,n}(x) = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k \, S_{\nu_k}(x).$$

Also, let $\Lambda(x)$ denote the function inverse to a continuous, monotone extension of λ_n.

L e m m a 1. *For any index set* $\nu=\{\nu_k\}$,

(4) $$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\nu,n}(x) = f(x) \qquad \text{a. e.}$$

if and only if

(5) $$\lim_{k\to\infty} S_{\nu_{p_k}}(x) = f(x) \qquad \text{a. e.,}$$

where $p_k = [\Lambda(2^k)]$. ($[x]$ denotes greatest integer function.)

P r o o f. ([4], [1, Lemma 4. 2]).

L e m m a 2. *Let $R(\lambda, 1)$-summability be a Riesz method stronger than convergence. Then there exists a sequence c_ν of positive, non-increasing real numbers such that*

(6) $$\sum c_\nu^2 (\log\log\lambda_\nu)^2 < \infty$$

but $\sum c_\nu^2 (\log \nu)^2$ *diverges.*

P r o o f. It is clear that

(7) $$\frac{\log n}{\log\log\lambda_n} \neq O(1)$$

as $n\to\infty$, since if it were $O(1)$, any sequence of partial sums that is $R(\lambda, 1)$-summable would be convergent, for (6) would then imply

(8) $$\sum c_\nu^2 \log^2 \nu < \infty$$

which, in turn, would imply convergence of $\sum c_\nu \Phi_\nu(x)$ by the theorem of MENCHOFF and RADEMACHER [3, p. 164].

A particular sequence $\{n_k\}$ of positive integers will now be defined. Let $n_0=1$ and let n_1 be the smallest integer such that

$$\frac{\log n_1}{\log\log\lambda_{n_1}} \geqq 2.$$

Such an integer exists by (7). In general, if $n_1, \ldots, n_k$ have been defined, let n_{k+1} be the smallest integer greater than $(n_k+1)^2-1$ and such that

$$\frac{\log n_{k+1}}{\log\log\lambda_{n_{k+1}}} \geqq 2^{k+1}.$$

Now, let $\{c_\nu\}$ be defined such that

$$c_\nu = \nu^{-1/2} (\log n_k)^{-3/2}$$

when $n_{k-1} < \nu < n_k$. Then $\{c_\nu\}$ is a positive, non-increasing sequence and

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} c_\nu^2 \log^2 \nu = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} c_\nu^2 \log^2 \nu = \sum_{k=0}^{\infty} (\log n_{k+1})^{-3} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\log^2 \nu}{\nu} \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\log^3 n_{k+1}} \left[\frac{\log^3 (n_{k+1}+1)}{3} - \frac{\log^3 (n_k+1)}{3} \right] \geqq$$

$$\geqq \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} \right] = \infty.$$

But

$$\sum_{\nu: \lambda_\nu \geqq 2} c_\nu^2 (\log \log \lambda_\nu)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} c_\nu^2 (\log \log \lambda_\nu)^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log n_{k+1}} \sum_{\nu=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{\nu \log^2 n_{k+1}} (\log \log \lambda_{n_{k+1}})^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1} \log n_{k+1}} \sum_{\nu=2}^{n_{k+1}} \frac{1}{\nu} \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < \infty.$$

Proof of Theorem 1. TANDORI [6] has shown that if $\{c_\nu\}$ is a sequence of positive, non-increasing real numbers then condition (8) is necessary and sufficient for the convergence a. e. of $\sum c_\nu \psi_\nu(x)$ for every orthonormal system $\{\psi_\nu(x)\}$. Moreover, if condition (8) is not satisfied, $\{\psi_\nu(x)\}$ can be determined such that for a suitably chosen index set $\{N_k\}$, the series $\sum c_\nu \psi_\nu(x)$ with the N_k-th terms deleted, diverges everywhere. This example of TANDORI is a modification of an example of MENCHOFF [5]. By Lemma 2, the sequence $\{c_\nu\}$ can be chosen such that (8) does not hold but (6) does. Let $\sum c_\nu^* \psi_\nu^*(x)$ denote the orthogonal series formed by deleting the N_k-th terms and re-indexing. Denote its partial sums by $\{S_n^*(x)\}$. Condition (6) then implies that $\{S_n^*(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e. Also, if $p_\nu = [\Lambda(2^\nu)]$, then $\{S_{p_\nu}^*(x)\}$ converges a. e. The theorem will be proved by constructing an orthonormal system $\{\Phi_n(x)\}$, a sequence $\{a_\nu\}$, and an index set $\{\nu_k\}$ such that

(9) $$S_{p_\nu}(x) = S_{p_w}^*(x)$$

where $w = w_\nu$ tends to ∞ as ν tends to ∞, and such also that

(10) $$S_{\nu_{p_k}}(x) = S_k^*(x).$$

Property (9) will show that $\{S_n(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e. and (10) will show the divergence of $\sigma_{\nu,n}(x)$ by Lemma 1.

The index set $\{\nu_k\}$ will now be constructed to have the property that for every $m \geqq M$,

(11) $$\max \{k:\ \nu_{p_k} \leqq p_m\} = p_w$$

for some w. Let $\nu_i = i$ for $i = 1, 2, \ldots, p_{p_1}$. Let μ be the smallest integer such that

$$p_{p_\mu + R + 1} - p_{p_\mu + R} > p_{p_2} - p_{p_1}$$

for some R, $0 \leqq R \leqq p_{\mu+1} - p_\mu$. Such a value of μ exists since the sequence $\{p_{\nu+1} - p_\nu\}$, $\nu = 0, 1, \ldots$ cannot be bounded if $R(\lambda, 1)$-summability is stronger than convergence [2]. Now, let

$$\nu_{p_{p_1}+i} = p_{p_\mu + R} + i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p_{p_2} - p_{p_1}.$$

In general, suppose ν_i has been defined for $i = 1, \ldots p_{p_k}$; let μ' be the smallest integer greater than p_k such that

$$p_{p_{\mu'} + R + 1} - p_{p_{\mu'} + R} > p_{p_{k+1}} - p_{p_k}$$

for some R, $0 \leqq R \leqq p_{\mu'+1} - p_{\mu'}$. Now, define

$$\nu_{p_{p_k}+i} = p_{p_{\mu'} + R} + i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p_{p_{k+1}} - p_{p_k}.$$

This defines $\{\nu_i\}$ such that for every $m \geqq p_{p_1}$, property (11) holds.

Now, define

$$a_\nu = \begin{cases} c_n, & \nu = \nu_{p_n}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{12}$$

and let $\Phi_{p_n}(x) = \psi_n^*(x)$. Complete the definition of the orthonormal system $\{\Phi_n(x)\}$ with sucessive members of $\psi_{N_k}(x)$. It will be shown that properties (9) and (10) are satisfied for this system.

$$S_{\nu_{p_n}}(x) = \sum_{k=1}^{\nu_{p_n}} a_k \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu_{p_k}} \Phi_{\nu_{p_k}}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \psi_k^*(x) = S_n^*(x).$$

Thus, (10) is proved.

$$S_{p_m}(x) = \sum_{k=1}^{p_m} a_k \Phi_k(x) = \sum_{k:\, \nu_{p_k} \leqq p_m} a_{\nu_{p_k}} \Phi_{\nu_{p_k}}(x) = \sum_{k=1}^{p_w} c_k^* \psi_k^*(x) = S_{p_w}^*(x).$$

Thus, (9) holds and the proof the theorem is completed.

2. Proof of Theorem 2

Let $f(x)$ be a square-integrable function to which $\{S_n(x)\}$ is $R(\lambda, 1)$-summable a. e.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=j}^{n} \Delta\lambda_k [S_{\nu_k}(x) - f(x)]^2 \leqq \\ &\leqq \frac{2}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k [S_{\nu_k}(x) - \sigma_{\nu_k}(x)]^2 + \frac{2}{\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k [\sigma_{\nu_k}(x) - f(x)]^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Since $\sigma_{\nu_k}(x)$ converges to $f(x)$ a. e., the last term on the right side of (13) converges to 0 a. e. The first term on the right side of (13) will converge to 0 a. e. if

$$I_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [S_{\nu_k}(x) - \sigma_{\nu_k}(x)]^2$$

is finite a. e. as $n \to \infty$. To show this it is seen that

$$\int_0^1 I_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \int_0^1 \left(\frac{1}{\lambda_{\nu_k+1}} \sum_{j=1}^{\nu_k} \lambda_j a_j \Phi_j(x) \right)^2 dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \cdot \frac{1}{\lambda^2_{\nu_k+1}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i} \lambda_j^2 a_j^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \cdot \frac{1}{\lambda^2_{\nu_k+1}} \sum_{i=0}^{k} \lambda^2_{\nu_i} \sum_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i} a_j^2 .$$

Therefore,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 I_n(x)\,dx \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^2_{\nu_j} \sum_{i=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} a_i^2 \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_{k+1}\lambda^2_{\nu_k}} =$$

$$= O(1) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} a_i^2 = O(1) \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty .$$

This completes the proof of the theorem.

Bibliography

[1] D. Eustice, *Summability of orthogonal series*, Thesis, Purdue University, 1960.
[2] G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet series* (Cambridge, 1952).
[3] S. Kaczmarz and H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935).
[4] J. Meder, On very strong Riesz-summability of orthogonal series, *Studia Math.*, **20** (1961), 285—300.
[5] D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales (Deuxième Partie), *Fund. Math.*, **8** (1926), 56—108.
[6] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen I, IV, VI, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130; **19** (1958), 18—25; **20** (1959), 14—18.
[7] Z. Zalcwasser, Sur la sommabilité des séries de Fourier, *Studia Math.*, **6** (1936), 82—88.
[8] A. Zygmund, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fund. Math.*, **10** (1927), 356—362.

UNIVERSITY OF ILLINOIS

(Received November 25, 1961)

Abschätzungen für die Partialsummen und für die $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel allgemeiner Orthogonalreihen

Von LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

Einleitung

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \ldots)$ ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem. Sei $\lambda(\omega)$ $(\omega \geqq 0)$ eine positive, im strengen Sinne wachsende Funktion mit $\lambda(0)=0$ und $\lambda(n) \to \infty$ und $\Lambda(\omega)$ die eindeutig bestimmte inverse Funktion von $\lambda(\omega)$. Wir setzen $\mu_n = [\Lambda(2^n)]$.[1]) Es seien $n_0 < n_1 < \ldots < n_i < \ldots$ die Indizes n, für welche $\mu_{n+1} > \mu_n$ gilt. Die n-te Teilsumme, bzw. das n-te $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel der Orthogonalreihe

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

wird mit $s_n(x)$, bzw. mit $\sigma_n(\{\lambda(n)\}; x)$ bezeichnet, d. h. ist

$$s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x), \quad \sigma_n(\{\lambda(n)\}; x) = \frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n+1} \big(\lambda(n+1) - \lambda(\nu)\big) c_\nu \varphi_\nu(x).$$

K. TANDORI [3] hat die folgenden Sätze bewiesen:

Satz A. *Es sei $\{w(n)\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

(2) $$w(n) = o(\log n)$$

erfüllt. Es kann dann eine Koeffizientenfolge $\{a_n\} \in l^2$ und ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in (a, b) überall gilt:

(3) $$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{w(N)} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty.$$

Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.

Satz B. *Es sei $\{l_n\}$ eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

(4) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^2 n}{l_n^2} = \infty$$

[1]) $[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α.

erfüllt. Es kann dann ein im Intervall (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *angegeben werden, so daß in* (a, b) *überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \frac{1}{l_N}\left|\sum_{n=0}^{N}\Phi_n(x)\right| = \infty \tag{5}$$

ist. Dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *kann sogar gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

Satz C. *Es sei* $\{w_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge, welche die Bedingung*

$$w_n = o(\log\log n) \tag{6}$$

erfüllt. Dann kann man eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}\in l^2$ *und ein im Intervall* (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart angeben, daß für jedes* $\alpha > 0$ *überall in* (a, b)

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \frac{1}{w_N}\left|\frac{1}{A_N^{(\alpha)}}\sum_{\nu=0}^{N} A_{N-\nu}^{(\alpha)} a_\nu \Phi_\nu(x)\right| = \infty \tag{7}$$

besteht. Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ *kann auch gleichmäßig beschränkt gewählt werden.*

G. Alexits [1] hat den folgenden Satz bewiesen:

Satz D. *Ist* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monoton zunehmende Zahlenfolge und genügen die nicht verschwindenden, sonst beliebigen Koeffizienten* $c_0, c_1, \ldots$ *der Bedingung*

$$\sum \frac{c_n^2}{\lambda_n^2 \sum\limits_{\nu=0}^{n} c_\nu^2} < \infty, \tag{8}$$

so gilt fast überall

$$s_n(x) = o_x\left(\lambda_n \log n \cdot \sqrt{\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^2}\right).\ ^{*)}$$

In einem anderen Aufsatz hat Verfasser [2] (Satz VI) u. a. einen allgemeinen Satz, welcher das $(R, \lambda(n), 1)$-Analogon des Satzes D als Spezialfall enthält, bewiesen. Dieser Spezielfall lautet folgenderweise:

Satz E. *Es sei* $\{\lambda_n\}$ *eine positive, monoton nichtabnehmende Zahlenfolge. Genügen die Koeffizienten* $c_0(\neq 0), c_1, \ldots$ *und die Folge* $\{\lambda_n\}$ *der Bedingung* (8), *so gilt fast überall*

$$\sigma_n(\{\lambda(n)\}; x) = o_x\left(\lambda_n \log\log\lambda(n) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

In diesem Aufsatz werden wir beweisen, daß die Sätze D und E nicht verbessert werden können. Es gelten nämlich die folgenden Sätze:

*) Der Kürze halber schreiben wir immer $\log n \cdot U$ statt $(\log n)U$.

Satz I. *Es seien $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für welche die Bedingungen*

$$(9)\qquad \lambda_n \log n \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda_{n+1} \log(n+1) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

$$\lambda_n \log n \geqq 1 \quad (n > m_0)$$

und

$$(10)\qquad \sum \frac{a_n^2}{\lambda_n^2 \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu^2} = \infty$$

erfüllt sind. Dann kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ derart angegeben werden, daß in (a, b) fast überall

$$(11)\qquad \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N \log N \cdot \left(\sum\limits_{\nu=0}^{N} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| = \infty$$

gilt.

Satz II. *Es seien $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für welche die Bedingungen* (10),

$$(12)\qquad \lambda_n \log\log \lambda(n) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda_{n+1} \log\log \lambda(n+1) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_n \log\log \lambda(n) \geqq 1 \quad (n > m_0)$$

und

$$(13)\qquad A_{\mu_{n_i}}^2 \geqq A_{\mu_{n_{i+1}}}^2 \qquad \left(A_{\mu_{n_i}}^2 = \sum_{\nu=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_i+1}} a_\nu^2\right)$$

erfüllt sind. Gilt $\log n_i = O(\log i)^2$), so kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, so daß in (a, b) fast überall

$$(14)\qquad \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N \log\log \lambda(N) \cdot \left(\sum\limits_{\nu=0}^{N} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left| \frac{1}{\lambda(N+1)} \sum_{\nu=0}^{N+1} (\lambda(N+1) - \lambda(\nu)) a_\nu \Phi_\nu(x) \right| = \infty$$

gilt.

Der Spezialfall $\lambda(n) = n$ verdient eigens ausgesprochen zu werden:

Satz III. *Es sei $\{a_n\}$ eine Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, für welche die Bedingungen* (10),

$$\lambda_n \log\log n \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \lambda_{n+1} \log\log(n+1) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{n+1} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda_n \log\log n \geqq 1 \quad (n > m_0)$$

[2]) Diese Bedingung besteht immer mit Ausnahme sehr extremer Fälle.

und

$$\sum_{\nu=2^m+1}^{2^{m+1}} a_\nu^2 \geqq \sum_{\nu=2^{m+1}+1}^{2^{m+2}} a_\nu^2$$

erfüllt sind. Dann kann ein im Intervall (a, b) *orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart angegeben werden, daß in* (a, b) *fast überall*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{\lambda_N \log\log N\cdot\left(\sum_{\nu=0}^{N} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} |\sigma_N(x)| = \infty \tag{15}$$

gilt, wobei $\sigma_n(x)$ *das n-te* $(C, 1)$*-Mittel der Reihe* $\sum a_\nu \Phi_\nu(x)$ *bezeichnet.*

Weiterhin ergibt sich aus dem Satz II im Falle $\lambda_n^{-1} = \log\log\lambda(n)$ unmittelbar der folgende:

Satz IV. *Es sei* $\{a_n\} \in l^2$ *eine Koeffizientenfolge mit* (13), *so ist die Zygmundsche Bedingung*

$$\sum a_n^2 \log\log_+^2 \lambda(n) < \infty\,^{3)}$$

nicht nur hinreichend, sondern im Falle $\log n_i = O(\log i)$ *auch notwendig dafür, daß die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall* $(R, \lambda(n), 1)$*-summierbar ist, sogar gibt es im Falle* $\sum_{n=0}^{\infty} a^2 \log\log_+^2 \lambda(n) = \infty$ *ein orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_n(x)\}$, *für welches die* $(R, \lambda(n), 1)$*-Mittel nicht beschränkt divergieren.*

Von dem Satz I kann auch unmittelbar abgelesen werden, daß im Falle $\{a_n\} \in l^2$, $a_n \geqq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $\lambda_n = \frac{1}{\log n}$, d. h. im Falle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \log^2 n = \infty$, ein in (a, b) orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden kann, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ in (a, b) fast überall *nicht beschränkt divergiert.*

Man kann leicht einsehen, daß der Satz I auch die Sätze A und B enthält.

Zuerst sei gezeigt, daß der Satz A aus dem Satz I folgt. Nach (2) besteht

$$\lambda_n = \frac{w(n)}{\log n} = o(1). \tag{16}$$

Darum kann eine Indexfolge $\{\nu_k\}$ bestimmt werden, so daß für $n > \nu_k$: $\lambda_n \leqq \frac{1}{k}$ und $(\nu_{k+1} - \nu_k)k^2 \geqq (\nu_k - \nu_{k-1})(k-1)^2$ gelten. Wir setzen

$$a_n = \frac{1}{k(\nu_{k+1} - \nu_k)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{für} \quad \nu_k < n \leqq \nu_{k+1}.$$

[3]) Siehe A. Zygmund [5]; weiterhin ist $\log_+ x = \max\{1, \log x\}$.

Offenbar ist $\{a_n\}$ eine monotone Koeffizientenfolge, für die

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n^2 \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2} \geqq \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \frac{a_n^2}{\lambda_n^2} = \infty$$

gelten. Also genügen die Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und diese Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ den Bedingungen des Satzes I, und so gibt es ein orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem, für welches (11), und infolge (16) auch (3) besteht.

Man kann auch das leicht beweisen, daß der Satz I auch den Satz B enthält. Es sei $a_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$ und $\lambda_n^{*2} = \dfrac{l_n^2}{n \log^2 n}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^{*2} n} = \infty$ wegen (4), also kann eine Zahlenfolge $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \to \infty$, $\lambda_n^* \eta_n (\log n) \sqrt{n} \leqq \lambda_{n+1}^* \eta_{n+1} (\log(n+1))\sqrt{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^{*2} \eta^2 n} = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n^* \eta_n \log n \cdot n} < \infty$ angegeben werden. (Siehe den Beweis des Satzes I.) Aus der letzten Ungleichung folgt $\lambda_n \log n \geqq 1$ für $n > m_0$ mit $\lambda_n = \lambda_n^* \eta_n$. Offenbar genügen diese Koefffizientenfolge und die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ den Bedingungen des Satzes I, folglich kann auch jetzt ein orthonormiertes gleichmäßig beschränktes Funktionensystem angegeben werden, für welches (11), und nach der Definition von λ_n gilt auch (5).

Wir können leicht einsehen, daß der Satz III auch den Satz C mit $\alpha = 1$ enthält. Nach (6) besteht

$$\lambda_n = \frac{w_n}{\log \log n} = o(1). \tag{17}$$

Darum kann eine Indexfolge $\{\nu_k\}$ derart bestimmt werden, daß für beliebiges s und $n > \nu_k$: $\lambda_{2^n+s} \leqq 1/k$ und $(\nu_{k+1} - \nu_k) k^2 \geqq (\nu_k - \nu_{k-1})(k-1)^2$ gelten. Wir setzen

$$A_{2^n}^2 = \frac{1}{k^2 (\nu_{k+1} - \nu_k)} \quad \text{für } \nu_k < n \leqq \nu_{k+1} \quad \text{und} \quad a_m^2 = \frac{A_{2^n}^2}{2^n} \quad \text{für } 2^n < m \leqq 2^{n+1}.$$

Offenbar ist $\{A_{2^n}\}$ eine monoton abnehmende Zahlenfolge, für die

$$d^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = O(1) \sum_{n=0}^{\infty} A_{2^n}^2 < \infty$$

und

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m^2}{\lambda_m^2 \sum_{s=0}^{m} a_s^2} \geqq d \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \sum_{m=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{a_m^2}{\lambda_m^2} \geqq d \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1}{k^2} = \infty$$

gelten. Also genügen diese Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ und diese Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ den Bedingungen des Satzes III, folglich gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem, für welches (15), und nach (17) auch die Beziehung (7) mit $\alpha = 1$ besteht.

§ 1. Beweis von Satz I

Zum Beweis werden wir den folgenden Satz von K. Tandori [3] benötigen:

Es sei $\{b_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge, für welche die Bedingung

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \log^2 n = \infty$$

erfüllt ist. Dann kann ein im Intervall (a, b) orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ angegeben werden, für welches die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x)$$

im Intervall (a, b) überall divergiert.

Es seien $\{a_n\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, welche die Bedingungen (9) und (10) erfüllen. Ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n \log n \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty, \tag{1. 1}$$

dann sei $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n$. Besteht (1. 1) nicht, so sei $\lambda_n^* = \max\{\lambda_n, \sqrt{\lambda_n \log n}\}$. Im Falle

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n^* \log n \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty \tag{1. 2}$$

setzen wir $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n^*$, gegenfalls $\tilde{\lambda}_n = \max\{\lambda_n, \sqrt{\lambda_n^* \log n}\}$. Die so definierte Zahlenfolge $\{\tilde{\lambda}_n\}$ genügt wegen der monotonen Abnahme von $\{a_n\}$ den Bedingungen (9) und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n \log n \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty. \tag{1. 3}$$

Daraus folgt die Existenz einer positiven, stets wachsenden Zahlenfolge $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \to \infty$ und

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \eta_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty. \tag{1. 4}$$

Wir setzen $\bar{\lambda}_n = \tilde{\lambda}_n \eta_n$. Dann ist auf Grund von (9), (1. 4) und der Definition von $\{\bar{\lambda}_n\}$ mit den monotonen Koeffizienten $\gamma_n^2 = \dfrac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n^2 \log^2 n \cdot \sum^{n} a_\gamma^2}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \log^2 n = \infty.$$

Wir können also den zitierten Satz von K. Tandori mit den Koeffizienten $b_n = \gamma_n$ anwenden. Folglich gibt es ein orthonormiertes, gleichmäßig beschränktes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die Reihe $\sum \gamma_n \Phi_n(x)$ in (a, b) überall divergiert. Mit einer Abelschen Transformation ergibt sich mit der Abkürzung $t_n = \dfrac{1}{\bar{\lambda}_n \log n \cdot \sqrt{\sum\limits^{n} a_\nu^2}}$:

$$\sum_{n=2}^{N} \gamma_n \Phi_n(x) = \sum_{n=2}^{N-1} (t_n - t_{n+1}) \bar{s}_n(x) + t_N \bar{s}_N(x) - t_2 \bar{s}_1(x)$$

und so gilt

$$t_N \bar{s}_N(x) = \sum_{n=2}^{N} \gamma_n \Phi_n(x) - \sum_{n=2}^{N-1} (t_n - t_{n+1}) \bar{s}_n(x) + t_2 \bar{s}_1(x), \tag{1.5}$$

wobei $\bar{s}_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum a_n \Phi_n(x)$ bezeichnet.

Mit einfacher Rechnung bekommen wir die Abschätzung:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (t_n - t_{n+1}) \int_a^b |\bar{s}_n(x)| \, dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} (t_n - t_{n+1}) \left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Für jedes s ist mit $\alpha_n = \left(\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{n=2}^{s} \alpha_n (t_n - t_{n+1}) = \alpha_2 t_2 + \sum_{n=3}^{s} t_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) - \alpha_s t_{s+1},$$

woraus wegen $\alpha_s t_{s+1} \to 0$ $(s \to \infty)$ folgt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (t_n - t_{n+1}) = \alpha_2 t_2 + \sum_{n=3}^{\infty} t_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}). \tag{1.7}$$

Wir erhalten auf Grund von (1. 3)

$$\sum_{n=3}^{\infty} t_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) = \sum_{n=3}^{\infty} t_n \frac{\alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} = O(1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n \log n \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu^2} < \infty,$$

woraus sich auf Grund von (1. 6), (1. 7) und dem B. Levischen Satz ergibt, daß die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (t_n - t_{n+1}) \bar{s}_n(x)$$

in (a, b) fast überall konvergiert. So divergiert die rechte Seite von (1. 5) nach obigen fast überall, und folglich ist fast überall

$$t_N |\bar{s}_N(x)| = \frac{1}{\bar{\lambda}_N \log N \cdot \sqrt{\sum\limits^{N} a_\nu^2}} \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \Phi_n(x) \right| \neq o(1).$$

Daraus folgt nach der Definition von $\bar{\lambda}_n$, daß die Beziehung (11) mit diesem Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ fast überall in (a, b) erfüllt wird.

Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis von Satz II

Zum Beweis werden wir den folgenden Satz von K. TANDORI [4] benötigen:

Es sei $\{\nu_k\}$ $(0=\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_k<\ldots)$ *eine Indexfolge. Damit die Folge der* ν_i*-ten Partialsummen der Orthogonalreihe* (1) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall konvergiert, ist notwendig, daß*

$$(2.1)\qquad \sum_{l=0}^{\infty} C_l^2(\{\nu_k\}) \log_+^2 C_l^{-2}(\{\nu_k\}) < \infty$$

gilt, wobei $C_l^2(\{\nu_k\}) = c_{\nu_l+1}^2+\ldots+c_{\nu_{l+1}}^2$ *ist.*

Sogar ergibt sich aus dem Beweis, den Herr. TANDORI hierfür angegeben hat, etwas mehr:

Ist die Bedingung (2. 1) *nicht erfüllt, dann gibt es ein orthonormiertes Funktionensystem* $\{\Phi_i(x)\}$ *derart, daß die Folge der* ν_i*-ten Partialsummen der Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} c_i\Phi_i(x)$ *fast überall divergiert.*

Seien $\{a_n\}$ eine positive Koeffizientenfolge und $\{\lambda_n\}$ eine positive Zahlenfolge, welche die Bedingungen (10), (12) und (13) erfüllen. Ist

$$(2.2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n \log\log_+ \lambda(n)\cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty,$$

so sei $\tilde{\lambda}_n=\lambda_n$. Besteht (2. 2) nicht, so sei $\lambda_n^* = \max\{\lambda_n, (\lambda_n \log\log_+ \lambda(n))^{\frac{1}{2}}\}$. Im Falle

$$(2.3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\lambda_n^* \log\log_+ \lambda(n)\cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty$$

setzen wir $\tilde{\lambda}_n=\lambda_n^*$, im entgegengesetzten Fall $\tilde{\lambda}_n = \max\{\lambda_n, (\lambda_n^* \log\log_+ \lambda(n))^{\frac{1}{2}}\}$. Die so definierte Zahlenfolge $\{\tilde{\lambda}_n\}$ erfüllt offenbar die Bedingungen (12) und

$$(2.4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \sum^{n} a_\nu^2} = \infty.$$

Die Ungleichung

$$(2.5)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n \log\log_+ \lambda(n).\ \sum^{n} a_\nu^2} < \infty$$

folgt in den ersten beiden Fällen unmittelbar aus der Definition von $\{\tilde{\lambda}_n\}$, im letzten Fall kann man sie mit der folgenden einfachen Rechnung beweisen. Nach (12) ist $\lambda_n^* \geqq 1$ für alle genügend große n, also gilt auf Grund von (13) im Falle $\tilde{\lambda}=(\lambda_n^* \log\log_+ \lambda(n))^{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}} \frac{a_k^2}{\tilde{\lambda}_k \log\log_+ \lambda(k)\cdot \sum^{k} a_\nu^2} = O(1) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}} \frac{a_k^2}{\log\log_+^{3/2} \lambda(k)\cdot \sum^{k} a_\nu^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\log_+^{3/2} n_i \cdot \sum^{\mu_{n_i}} a_\nu^2} A_{\mu_{n_i}}^2 = O(1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i \log_+^{3/2} i} < \infty,$$

womit (2. 5) in jedem Fall bewiesen ist. Wegen (2. 4) gibt es eine positive, stets wachsende Zahlenfolge $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \to \infty$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \eta_n^2 \sum^n a_\nu^2} = \infty. \tag{2.6}$$

Wir setzen $\bar{\lambda}_n = \tilde{\lambda}_n \eta_n$ und

$$b_n^2 = \frac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n^2 \log\log_+^2 \lambda(n) \cdot \sum^n a_\nu^2}, \quad \beta_{\mu_{n_i}}^2 = \sum_{\nu=\mu_{n_i}+1}^{\mu_{n_{i+1}}} b_\nu^2.$$

Offenbar bestehen die Ungleichungen

$$\beta_{\mu_{n_i}}^2 \geqq \beta_{\mu_{n_i+1}}^2 \quad (i=1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{\mu_{n_i}}^2 < \infty.$$

Dann ist aber $\beta_{\mu_{n_i}}^2 = o(i^{-1})$ und es gilt nach (2. 6)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_{\mu_{n_i}}^2 \log_+^2 \beta_{\mu_{n_i}}^{-2} \geqq \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{\mu_{n_i}}^2 \log_+^2 i \geqq \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\bar{\lambda}_n^2 \sum^n a_\nu^2} = \infty \qquad (\infty > \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0).$$

Man kann also die zweite Form des erwähnten von K. Tandori mit den Koeffizienten $c_n = b_n$ und mit der Indexfolge $\nu_i = \mu_{n_i}$ anwenden. So ergibt sich ein orthonormiertes Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$, für welche die Folge der μ_{n_i}-ten Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x)$ in (a, b) überall divergiert. Wir bekommen durch Abelsche Transformation mit der Abkürzung $t_n = \dfrac{1}{\bar{\lambda}_n \log\log_+ \lambda(n) \cdot (\sum^n a_\nu^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\sum_{i=2}^{\mu_{n_N}} b_i \Phi_i(x) = \sum_{i=2}^{\mu_{n_N}-1} (t_i - t_{i+1}) \bar{s}_i(x) + t_{\mu_{n_N}} \bar{s}_{\mu_{n_N}}(x) - t_2 \bar{s}_1(x)$$

und so gilt

$$t_{\mu_{n_N}} \bar{s}_{\mu_{n_N}}(x) = \sum_{i=2}^{\mu_{n_N}} b_i \Phi_i(x) - \sum_{i=2}^{\mu_{n_N}-1} (t_i - t_{i+1}) \bar{s}_i(x) + t_2 \bar{s}_1(x), \tag{2.7}$$

wobei $\bar{s}_i(x)$ die i-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ bezeichnet. Genau so wie im Beweis des Satzes I kann man beweisen, daß die Reihe

$$\sum_{i=2}^{\infty} (t_i - t_{i+1}) \bar{s}_i(x)$$

in (a, b) fast überall konvergiert. Nach dem obigen divergiert aber die rechte Seite von (2. 7) in (a, b) fast überall, also ist fast überall

$$t_{\mu_{n_N}} |\bar{s}_{\mu_{n_N}}(x)| = \frac{1}{\bar{\lambda}_{\mu_{n_N}} \log\log_+ \lambda(\mu_{n_N}) \cdot \left(\sum^{\mu_{n_N}} a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu_{n_N}} a_\nu \Phi_\nu(x) \right| \neq o(1). \tag{2.8}$$

Weiterhin gilt nach (12), (2. 5) und der Definition von $\{\tilde{\lambda}_n\}$ mit der Abkürzung $l_n = \dfrac{1}{\tilde{\lambda}_n \log\log_+ \lambda(n)\cdot\left(\sum^n a_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ die folgende Abschätzung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \int_a^b (\bar{s}_{\mu_n}(x) - \bar{\sigma}_{\mu_n}(\{\lambda(n)\};\, x))^2\, dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \lambda^2(\nu) \frac{1}{\lambda^2(\mu_n+1)} =$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \lambda^2(\nu) = O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \lambda^2(\nu) \right) \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{l_{\mu_n}^2}{2^{2n}} =$$

$$= O(1) \sum_{l=0}^{\infty} 2^{2k} \left(\sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 \right) l_{\mu_{k+1}}^2 \frac{1}{2^{2k}} =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\mu_{k+1}}^2 \log\log_+^2 \lambda(\mu_{k+1}) \cdot \sum^{\mu_{k+1}} a_\nu^2} \sum_{\nu=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} a_\nu^2 =$$

$$= O(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\tilde{\lambda}_n^2 \log\log_+^2 \lambda(n) \cdot \sum^{n} a_\nu^2} < \infty,$$

wobei $\bar{\sigma}_n(\{\lambda(n)\};\, x)$ das n-te $(R, \lambda(n), 1)$-Mittel der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x)$ bezeichnet. Daraus ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_{\mu_n}^2 (\bar{s}_{\mu_n}(x) - \bar{\sigma}_{\mu_n}(\{\lambda(n)\};\, x))^2$$

fast überall konvergiert, also fast überall

$$\bar{s}_{\mu_n}(x) - \bar{\sigma}_{\mu_n}(\{\lambda(n)\};\, x) = o_x\left(\tilde{\lambda}_{\mu_n} \log\log_+ \lambda(\mu_n) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\mu_n} a_\nu^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{2.9}$$

gilt. Auf Grund von (2. 7) ergibt sich aus (2. 8) und (2. 9), daß die Beziehung (14) für dieses Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ in (a, b) fast überall besteht, was zu beweisen war.

Schriftenverzeichnis

[1] ALEXITS, G., Sur les sommes de fonctions orthogonales, *Annales Soc. Math. Polonaise*, **25** (1952), 183—187.

[2] LEINDLER, L., Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, Zu erscheinen in *Acta Sci. Math.*, **24** (1963).

[3] TANDORI, K., Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

[4] TANDORI, K., Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math. Debrecen*, **8** (1961), 291—307.

[5] ZYGMUND, A., Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales, *Bulletin Intern. Acad. Polonaise Sci. Lettres (Cracovie)*, série A (1927), 293—308.

(Eingegangen am 7. Dezember 1961)

On a problem of L. Fuchs

By JÓZSEF DÉNES in Budapest

Introduction

In his book [2] L. FUCHS raised the following problem: "Delete k elements at random in the Cayley table of a finite group G of order n. Determine the greatest $k = k(n)$ for which

(a) the rest of the table always determines G up to isomorphism;

(b) the table can be reconstructed uniquely from the rest."

The aim of this paper is to solve problem (b) without the restriction that the group is Abelian.

It will be shown that for any given group G of order $n \neq 4$ we have

$$k(n) = 2n-1.$$

Thus $k(n)$ unexpectedly does not depend on the structure of the group, it depends only on the order of the group (Theorem 1). In the case $n=4$ we get $k(n)=3$ (Theorem 2).

I thank for the useful help of Prof. L. FUCHS.

§ 1. Definitions, notations

An abstract group is completely known if each of its elements is represented by a symbol and the product of any two symbols in any given order is exhibited. In finite groups the multiplication rule is given conveniently by a square table (called the Cayley table of the group) in which the products in a row have the same left factor and the products in a column have the same right factor.

Here we shall deal with finite groups, therefore we may assume that the elements of the groups are natural numbers $1, 2, \ldots, n$. Then the Cayley table of a group G is (1) a Latin square, i. e. a quadratic matrix $\|a_{ik}\|$ each of whose rows and columns is a permutation of $1, 2, \ldots, n$; and (2) the quadrangle criterion[1]) holds, i. e., for all indices $i, j, \ldots$, the equalities $a_{ik} = a_{i_1k_1}, a_{il} = a_{i_1l_1}, a_{jk} = a_{j_1k_1}$ imply $a_{jl} = a_{j_1l_1}$.

Conversely, any matrix $\|a_{ik}\|$ with properties (1) and (2) is a Cayley table of a group G; moreover, we may choose an arbitrary row and a column, say the j-th row and the l-th column, and consider them as the products of the elements by the group

[1]) The quadrangle criterion was at first pointed out by FROLOV in [1].

identity from the left and from the right, respectively. Then a_{jl} will be the identity of the arising system G_{jl}, and necessarily $a_{il}a_{jk} = a_{ik}$. Now (1) ensures that G_{jl} is a loop and (2) implies associativity, thus G_{jl} is a group. Clearly, any group with the same Cayley table arises in this way.

All these G_{jl} are isomorphic, for a transition from G_{jl} to G_{rs} means simply that we take three permutations ϱ, σ, τ such that $a \times b = c$ in G_{rs} if and only if $\varrho(a)\sigma(b) = \tau(c)$ in G_{jl}, i. e., the G_{jl} and G_{rs} are isotopic, and hence isomorphic groups.

Note that different multiplication tables of a group can be transformed into one another by row and column interchanges.[2])

If $\|a_{ik}\|$ and $\|b_{ik}\|$ are two Cayles tables, with the same number of rows, then we call the i-th rows corresponding rows, the k-th columns corresponding columns, and a_{ik} and b_{ik} corresponding elements.

Any permutation may be written as product of disjoint cycles. If all these cycles have the same length, the permutation is called regular. If for the permutations σ, τ we have $\sigma(a) \neq \tau(a)$ exactly for k letters a, then we say that they differ in k places.

Deleting k arbitrary elements in the Cayley table of a finite group G of order n, let $k(G)$ denote the greatest number of elements for which the table can be reconstructed uniquely from the rest.

§ 2. Determination of $k(G)$

Lemma 1. *Let π and ϱ denote two distinct regular permutations of degree n and of order l, m ($m \leqq l \leqq n$), respectively. If n is even and π, ϱ are of the form*

$$\pi = (i_1 i_2 \ldots i_n), \quad \varrho = (i_1 i_2 \ldots i_{\frac{n}{2}})(i_{\frac{n}{2}+1} \ldots i_n),$$

then they differ in two places. In all other cases they differ at least in three places.

Proof. Let us suppose that π and ϱ differ in two places. Then there is a transposition τ such that $\pi = \varrho\tau$. Both π and ϱ are products of disjoint cycles. If the letters of τ belong to the same cycle of ϱ, then in the product $\pi\tau$ this cycle splits into two, while in the other case the converse situation holds[3]). As π and ϱ are regular, they must have the indicated form.

Lemma 2. *Two different Cayley tables, A and A', of a group G differ from each other at least in $2n$ places.*

Proof. If all the corresponding rows of the two Cayley tables are different, then every row differs from the corresponding one at least in two places, and the two Cayley tables differ at least in $2n$ places. The same argument applies if the corresponding columns are different.

For the rest of the proof we may assume that the f-th rows and the g-th columns of the two Cayley tables are equal. By the quadrangle criterion $a_{fg} = a'_{fg}$, $a_{fj} = a'_{fj}$, $a_{ig} = a'_{ig}$ imply $a_{ij} = a'_{ij}$ for all indices i, j whence $A = A'$. Thus this case cannot occur.

Lemma 3. *If G and G' are different groups of the same order n ($n \neq 4$), then their arbitrary Cayley tables, A and A' differ from each other at least in $2n$ places.*

---

[2]) Similar transformations of Latin squares are described in Schönhardt [4].

[3]) The same statement is in Serret [5], p. 230.

P r o o f. We may suppose that at least one pair of corresponding rows of A and A' is equal. Otherwise we could use the same inference as that in the proof of Lemma 2 to obtain the desired conclusion.

Every finite group may be represented as a group of regular permutations (see e. g. JORDAN [3]). Such representations[4]) of G and G' are

$$x_i \to \begin{pmatrix} x \\ xx_i \end{pmatrix} \qquad (x_i \in G)$$

and

$$x_i' \to \begin{pmatrix} x \\ xx_i' \end{pmatrix} \qquad (x_i' \in G'),$$

where we may suppose that x varies over the elements of the equal row.

Let P, P' denote the regular permutation groups corresponding to G, G'. They are different, thus their intersection

$$H = P \cap P'$$

(a subgroup of the symmetric group of degree n) is of order $s \leqq \frac{n}{2}$. Clearly $n-s$ rows of the Cayley tables of G and G' are different, $n-s \geqq \frac{n}{2}$.

At first we consider the case when $s \leqq \frac{n}{3}$ and the set $(P \cup P') \setminus H$ does not contain both permutations of the form

$$\pi = (i_1 i_2 \dots i_n), \quad \varrho = (i_1 i_2 \dots i_{\frac{n}{2}})(i_{\frac{n}{2}+1} \dots i_n).$$

Then we have $3(n-s) \geqq 2n$.

By Lemma 1, the Cayley tables of G and G' are different at least in $3(n-s)$ places, so at least in $2n$ places.

If $s = \frac{n}{2}$ and the set $(P \cup P') \setminus H$ does not contain π and ϱ, then we show that the unequal corresponding rows differ from each other at least in four places. We verify that ψ and $\sigma (\psi \in P \setminus H, \sigma \in P' \setminus H)$ differ from each other at least in four places. If they differed from each other only in three places, then there would be a cycle φ of order 3 such that $\sigma\varphi = \psi$. Taking into consideration the regularity of ψ and σ and the fact that p is a product at least two transpositions, the difference between the numbers of cycles of ψ and σ is 2, or 0. Then ψ and σ must have the form 1), or 2):

1) $\psi = (i_1 i_2 \dots i_n), \quad \sigma = (i_1 \dots i_{\frac{n}{3}})(i_{\frac{n}{3}+1} \dots i_{\frac{2n}{3}})(i_{\frac{2n}{3}+1} \dots i_n),$

2) $\psi = (i_1 \dots i_j\, i_{j+1} \dots i_{j+k}\, i_{j+k+1} \dots i_m)(\dots)(\dots)\dots,$
$\sigma = (i_1 \dots i_j\, i_{j+k+1} \dots i_m\, i_{j+1} \dots i_{j+k})(\dots)(\dots)\dots.$

As H is a subgroup of index 2 in P and P', the powers of ψ and σ of even exponents are in H. Now we restrict ourselves to the case $n > 6$. In the first alternative

[4]) Latin squares may be represented by permutations. If the Latin square is a Cayley table, then it may be represented by regular permutations. Further details may be found in SCHÖNHARDT [4].

$\psi^{n-2}\sigma^2 \in H$ and $\psi^{n-2}\sigma^2\,(i_{\frac{n}{2}}) = i_n$. Since is regular, $\psi^{n-2}\sigma^2$ must be equal to the identical permutation. But because of $\psi^{n-2}\sigma^2\,(i_{\frac{n}{3}+2}) = i_2$ this is impossible. In the second case we may suppose that ψ and σ do not consist of a single cycle, for otherwise $\{\psi\}=P$ and $\{\sigma\}=P'$ are cyclic groups and our statement is trivial. We may assume $j \geqq 3$. As $\sigma^2 \in H$, $\psi^{m-2}\sigma^2$ is regular and $\psi^{m-2}\sigma^2(i_3) = i_3$, so it is the identical permutation. But because of $\psi^{m-2}\sigma^2(i_2) \neq i_2$, this is impossible.

Finally if $s \leqq \frac{n}{2}$ and $\pi, \varrho \in (P \cup P') \setminus H$ then $P=\{\pi\}$, $P'=\{\sigma, \varrho\}$ where σ is an arbitrary element of P' not in $\{\varrho\}=R$. Clearly $P \cap R = \varepsilon$ (the identical permutation) as every cycle of a power $\pi^k (\neq \varepsilon)$ contains letters both larger and smaller than $\frac{n}{2}$; and this is impossible for the elements of R. So $H \cap R = \varepsilon$. Therefore the products $\alpha\beta$ ($\alpha \in H$, $\beta \in R$) are different. As the index of R is 2, the order of H is at most 2. Therefore we may have only two equal rows in arbitrary Cayley tables of G and G'.

Let us suppose that among the elements of $P \setminus H$ and $P' \setminus H$ there are pairs, other than π and ϱ and their inverses whose letters differ from each other in two places. If π^k, ϱ' ($\pi^k \neq \pi$, $\varrho' \neq \varrho$) is such a pair, then ϱ' would not be an element of $\{\varrho\}$, $\varrho' \notin \{\varrho\}$, $\varrho'\varrho$ would not be regular.

As the elements of the sets $P \setminus H$ and $P \setminus H$ differ at least in three places from each other, except for π and ϱ, arbitrary Cayley tables of G and G' differ at least in $3(n-4)+2\cdot 2$ places from each other. This number is $\geqq 2n$ when $n>7$.

It remains to consider the cases when $n \leqq 7$. If n is a prime number, then all groups of order n are cyclic groups and so our statement is trivial.

The only case that remained is $n=6$. In view of Lemma 2, we may without loss of generality suppose that G and G' are not isomorphic, and so the groups in question are the cyclic and the dihedral groups of order six. Now

$$P = \{(123456)\}, \qquad P' = \{(123)(456), (16)(25)(34)\}.$$

H cannot contain the only permutation $(14)(25)(36)$ of order 2 because $\varrho(14)(25)(36) = (123)(456)(14)(25)(36) = (153426)$ and $(153426) \notin P'$. Thus $s=1$ and therefore arbitrary Cayley tables of G and G' differ from each other in $3(n-3)+2\cdot 2 = 3n-5 = 13 > 2\cdot 6$ places. This finishes the proof of Lemma 3.

T h e o r e m 1. *For a group G of order n we have*

$$k(G) = 2n-1 \qquad (n \neq 4).$$

P r o o f. Let us delete $2n-1$ arbitrary elements in a Cayley table A of the group G of order $n (n \neq 4)$. Suppose that there is a Cayley table A' ($A \neq A'$) of G having the property that the rest of A may be completed to A'. Then clearly, A and A' differ in $2n-1$ places, which is impossible because of Lemmas 2 and 3.

We have to prove now that we can delete $2n$ elements of a Cayley table A of a group G of order n, such that the rest of the table may be completed to a Cayley table A' different from A. If we exchange arbitrary symbols, a and b, throughout in A, then we obtain a new Cayley table differing from A exactly in $2n$ places. So the proof of our statement is completed.

C o r o l l a r y. *Two different Cayley tables of arbitrary groups of order n ($n \neq 4$) are different from each other at least in $2n$ places.*

Theorem 2. *An arbitrary Cayley table of the cyclic group of order* 4 *differs at least in four places from an arbitrary Cayley table of Klein's group.*

Proof. The two Cayley tables given below are different in four places.

a	b	c	d
b	c	d	a
c	d	a	b
d	a	b	c

(cyclic group of order 4)

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

(KLEIN's group)

In order to complete our proof we have to show that all distinct Latin squares are different from each other in at least four places.

This follows from the fact that if two corresponding rows (columns) are unequal, then they differ at least in two places. Thus if there is a pair of unequal corresponding rows, then there are at least two pairs of unequal columns, and therefore at least four different places.

§ 3. Remarks

The following statements are immediate consequences of our results above:

1) The result remains the same if we restrict the class of groups to any one of the following classes of finite groups: (i) solvable groups; (ii) nilpotent groups; (iii) abelian groups; (iv) cyclic groups.

2) If we suppose that the Cayley tables have to be normal, then[5] $k(G) = 2n-1$ for all n (inclusively the case $n=4$).

It seems to be natural to raise the following problem:

What is the number of multiplication tables of distinct groups of order n that differ from each other at most in m places?

References

[1] M. FROLOV, Recherches sur les permutations carrées, *Journal de Math. Spec.*, (3) **4** (1890), 111.

[2] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).

[3] C. JORDAN, *Traité des Substitutions* (Paris, 1870).

[4] E. SCHÖNHARDT, Über lateinische Quadrate und Unionen, *J. reine angew. Math.*, **163** (1930), 183—229.

[5] J. H. SERRET, *Handbuch der höheren Algebra*, 2. Auflage (Leipzig, 1879).

[6] A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Basel, 1956).

[7] H. J. ZASSENHAUS, *The Theory of Groups* (New York, 1958).

(Received June 13, 1961)

[5]) A Cayley table is called normal if its main diagonal contains only unit elements. For some properties of normal Cayley tables see ZASSENHAUS [7], p. 29.

Einige Bemerkungen über die Tschirnhaussche Transformation von Polynomidealen

Von WILFRIED NÖBAUER in Wien

L. RÉDEI hat in seinem Buch [1] die Tschirnhaussche Transformation von Idealen eines Polynomringes in einer Unbestimmten definiert und einige Aussagen darüber gewonnen. Diesen Begriff wollen wir auf Polynomideale in n Unbestimmten verallgemeinern und weitere einfache Sätze darüber beweisen. Insbesondere werden wir sehen, daß er in einem gewissen Zusammenhang steht mit dem von mir eingeführten Begriff des Vollideales (vergleiche [2]).

Es sei ϱ ein kommutativer Ring mit Einselement und $R = \varrho[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Wir bilden die direkte Summe von n Exemplaren von R und bezeichnen sie mit R_n, die Elemente von R_n denken wir uns in Komponentenschreibweise geschrieben. Sind

$$\mathfrak{a} = (f_1(x_1 \dots x_n), f_2(x_1 \dots x_n), \dots, f_n(x_1 \dots x_n)),$$
$$\mathfrak{b} = (g_1(x_1 \dots x_n), g_2(x_1 \dots x_n), \dots, g_n(x_1 \dots x_n))$$

zwei Elemente von R_n, so definieren wir für sie die Verknüpfung „Komposition" — wir drücken sie aus durch das Zeichen $\circ$ — durch

$$\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b} = (f_1(g_1, \dots, g_n), f_2(g_1, \dots, g_n), \dots, f_n(g_1, \dots, g_n)).$$

In Bezug auf diese Verknüpfung bildet R_n eine Halbgruppe mit dem Einselement $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathfrak{x}$.

Es sei nun A ein Ideal in R und $\mathfrak{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ein Element von R_n. Man erkennt sofort, daß gilt:

Die Menge aller Polynome $k(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ mit $k(\mathfrak{t}) = k(t_1, t_2, \dots, t_n) \in A$ bildet ein Ideal in R, das mit $A^{\mathfrak{t}}$ bezeichnet sei.

Wir sagen, daß $A^{\mathfrak{t}}$ aus A durch die Tschirnhaussche Transformation mit $\mathfrak{t}$ hervorgeht.

Im Fall $n = 1$ geht unsere Definition ersichtlich in die von RÉDEI gegebene über.

Wir wollen zunächst einige Rechenregeln für die Bildung der Tschirnhaus-Transformierten von Idealen A zusammenstellen. Es gilt:

(1) $$(A^{\mathfrak{t}})^{\mathfrak{u}} = A^{\mathfrak{u} \circ \mathfrak{t}}.$$

B e w e i s. $f(\mathfrak{x}) \in (A^{\mathfrak{t}})^{\mathfrak{u}} \leftrightarrow f(\mathfrak{u}) \in A^{\mathfrak{t}} \leftrightarrow f(\mathfrak{u} \circ \mathfrak{t}) \in A \leftrightarrow f(\mathfrak{x}) \in A^{\mathfrak{u} \circ \mathfrak{t}}$.

Weiter haben wir:

(2) Aus $A \subseteqq B$ folgt stets $A^{\mathfrak{t}} \subseteqq B^{\mathfrak{t}}$.

Das ist unmittelbar einzusehen.

Daß aber aus $A \subset B$ nicht $A^{\mathfrak{t}} \subset B^{\mathfrak{t}}$ folgen muß, erkennt man an folgendem Beispiel:

Es sei $n=1$, ϱ der Ring der ganzen Zahlen, $A=(0)$, $B=(x)$ und $\mathfrak{t}=0$. Dann gilt:

$$A^{\mathfrak{t}}=(x), \quad B^{\mathfrak{t}}=(x), \quad \text{aber} \quad A \subset B.$$

Für eine beliebige Indexmenge $\{\nu\}$ bezeichnen wir wie üblich mit $\bigcap\limits_{\nu} A_\nu$ den Durchschnitt der Ideale A_ν, mit $\sum\limits_{\nu} A_\nu$ das von der Vereinigungsmenge der A_ν erzeugte Ideal. Falls $\{\nu\}$ endlich ist, dann bezeichnen wir mit $\prod\limits_{\nu} A_\nu$ das vom Komplexprodukt der A_ν erzeugte Ideal. Es gilt:

$$(\bigcap_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}} = \bigcap_{\nu} A_\nu^{\mathfrak{t}}, \tag{3}$$

$$(\sum_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}} \supseteqq \sum_{\nu} A_\nu^{\mathfrak{t}}, \tag{4}$$

$$(\prod_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}} \supseteqq \prod_{\nu} A_\nu^{\mathfrak{t}}. \tag{5}$$

Wir beweisen diese Beziehungen folgendermaßen:

$$f(\mathfrak{x}) \in (\bigcap_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}} \leftrightarrow f(\mathfrak{t}) \in \bigcap_{\nu} A_\nu \leftrightarrow f(\mathfrak{t}) \in A_\nu \text{ für jedes } \nu \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow f(\mathfrak{x}) \in A_\nu^{\mathfrak{t}} \text{ für jedes } \nu \leftrightarrow f(\mathfrak{x}) \in \bigcap_{\nu} A_\nu^{\mathfrak{t}};$$

$$f(\mathfrak{x}) \in \sum_{\nu} A_\nu^{\mathfrak{t}} \rightarrow f(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{r} g_{\nu_i}(\mathfrak{x}) \text{ mit } g_{\nu_i}(\mathfrak{x}) \in A_{\nu_i}^{\mathfrak{t}} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(\mathfrak{t}) = \sum_{i=1}^{r} g_{\nu_i}(\mathfrak{t}) \rightarrow f(\mathfrak{t}) \in \sum_{\nu} A_\nu \rightarrow f(\mathfrak{x}) \in (\sum_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}};$$

$$f(\mathfrak{x}) \in \prod_{\nu} A_\nu^{\mathfrak{t}} \rightarrow f(\mathfrak{x}) = \sum g_1(\mathfrak{x}) g_2(\mathfrak{x}) \dots g_r(\mathfrak{x}) \text{ mit } g_i(\mathfrak{x}) \in A_i^{\mathfrak{t}} \rightarrow$$

$$\rightarrow f(\mathfrak{t}) = \sum g_1(\mathfrak{t}) g_2(\mathfrak{t}) \dots g_r(\mathfrak{t}) \rightarrow f(\mathfrak{t}) \in \prod_{\nu} A_\nu \rightarrow f(\mathfrak{x}) \in (\prod_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}}.$$

Es läßt sich aber weder in (4) noch in (5) das $\subseteqq$ Zeichen durch das Zeichen $=$ ersetzen, wie man an folgenden Beispielen erkennt:

Es sei $n=1$, ϱ der Ring der ganzen Zahlen und $\{\nu\} = \{1, 2\}$. Wir nehmen $A_1=(x)$, $A_2=(x+1)$ und $\mathfrak{t}=0$. Dann erhalten wir:

$$A_1^{\mathfrak{t}}=(x), \quad A_2^{\mathfrak{t}}=(x).$$

Wir haben $\sum\limits_{\nu} A_\nu = (x, x+1) = R$, daher $(\sum\limits_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}} = R$, weshalb hier in (4) nicht das Gleichheitszeichen gilt.

Weiter haben wir $\prod\limits_{\nu} A_\nu = (x(x+1))$, daher $(\prod\limits_{\nu} A_\nu)^{\mathfrak{t}} = (x)$, weshalb hier auch in (5) nicht das Gleichheitszeichen gilt.

Wir bezeichnen das Ideal $A \subseteq R$ als Vollideal, wenn gilt: *Aus* $f(\mathfrak{x}) \in A$ *folgt* $f(\mathfrak{t}) \in A$ *für jedes* $\mathfrak{t} \in R_n$.

Wir beweisen folgenden

Satz. *Ist A Ideal in R, dann ist das Ideal* $\bigcap_{\mathfrak{r} \in R_n} A^{\mathfrak{r}}$ *Vollideal von R, welches in A enthalten ist und alle in A enthaltenen Vollideale umfaßt.*

$\bigcap_{\mathfrak{r} \in R_n} A^{\mathfrak{r}}$ ist also das „größte" in A enthaltene Vollideal.

Beweis. Wir setzen $\bigcap_{\mathfrak{r} \in R_n} A^{\mathfrak{r}} = D$. Wegen $A^{\mathfrak{x}} = A$ haben wir $D \subseteq A$. Daß D Vollideal ist, sieht man folgendermaßen ein: Sei $f(\mathfrak{x}) \in D$ und $\mathfrak{t} \in R_n$ sowie $\mathfrak{r} \in R_n$. Dann haben wir

$$f(\mathfrak{x}) \in A^{\mathfrak{t} \circ \mathfrak{r}} = (A^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{t}},$$

daher gilt $f(\mathfrak{t}) \in A^{\mathfrak{r}}$, woraus sich, da $\mathfrak{r}$ beliebig sein kann, sogleich $f(\mathfrak{t}) \in D$ ergibt. Ist schließlich $V \subseteq A$ Vollideal von R, so folgt aus $f(\mathfrak{x}) \in V$ stets $f(\mathfrak{r}) \in V \subseteq A$, also gilt $V \subseteq A^{\mathfrak{r}}$, also $V \subseteq D$.

Aus dem Satz erhalten wir sogleich folgendes

Korollar. *Das Ideal A von R ist dann und nur dann Vollideal, wenn gilt* $A = \bigcap_{\mathfrak{r} \in R_n} A^{\mathfrak{r}}$.

Bemerkung. Die Tschirnhaustransformierte $A^{\mathfrak{r}}$ eines Vollideales A braucht keineswegs wieder ein Vollideal zu sein. Dies erkennt man etwa an folgendem Beispiel:

ϱ sei der Ring der ganzen Zahlen und $n = 1$. Es sei $A = (2)$ (das ist ersichtlich ein Vollideal) und $\mathfrak{t} = 0$. Dann haben wir $A^{\mathfrak{t}} = (x, 2)$, was ersichtlich kein Vollideal ist.

Eine naheliegende, aber anscheinend nur schwer zu beantwortende Frage ist folgende: Wie kann man ein vollständiges System der verschiedenen Tschirnhaustransformierten eines gegebenen Ideales A erhalten?

In Zusammenhang mit dieser Frage zeigen wir zunächst:

Das Einheitsideal R ist das einzige Ideal, das mit allen seinen Tschirnhaustransformierten übereinstimmt.

Beweis. Daß stets $R^{\mathfrak{r}} = R$ gilt, ist klar. Sei andererseits $A^{\mathfrak{r}} = A$ für alle $\mathfrak{r} \in R_n$; nach dem vorhin bewiesenen Satz ist dann A ein Vollideal, mit $f(x_1, x_2 \dots x_n) \in A$ gilt also für beliebige $u_i \in \varrho$ auch $f(u_1, u_2 \dots u_n) \in A$. Da auch für das Nullelement $\mathfrak{o} \in R_n$ gilt $A^{\mathfrak{o}} = A$, gehört jedes Polynom, dessen konstantes Glied zu A gehört, schon zu A, also haben wir insbesondere $x_1 \in A$, nach dem vorher festgestellten also $e \in A$ für das Einselement e von ϱ, also gilt $A = R$.

Für ein beliebiges Ideal A von R bezeichnen wir mit A_n diejenigen Elemente von R_n, deren sämtliche Komponenten zu A gehören. Klarerweise ist A_n ein Ideal in R_n und man erkennt sofort, daß in Verallgemeinerung einer Bemerkung von [1] gilt: Aus $\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{b} \mod A_n$ folgt stets $A^{\mathfrak{r}} = A^{\mathfrak{b}}$. Bezeichnet man also die Restklasse von $\mathfrak{r}$ mod A_n mit $\bar{\mathfrak{r}}$, so ist stets $A^{\bar{\mathfrak{r}}}$ ein eindeutig bestimmtes Ideal. Ist insbesondere R/A endlich, so hat A nur endlich viele verschiedene Tschirnhaustransformierte.

Setzt man voraus, daß A Vollideal ist, so ist die Kongruenzrelation mod A_n auch eine Kongruenzrelation in der von R_n in Bezug auf die Verknüpfung Komposition.

gebildeten Halbgruppe (siehe [2]) und man kann die Faktorhalbgruppe R_n/A_n nach dieser Kongruenzrelation bilden, deren Elemente eben die Restklassen $\bar{\mathfrak{r}}$ mod A_n sind. Wir zeigen für diesen Fall:

Genau dann gilt $A^{\bar{\mathfrak{r}}}=A$, wenn $\bar{\mathfrak{r}}$ ein rechtsreguläres Element der Faktorhalbgruppe R_n/A_n ist.

Beweis. Sei $\bar{\mathfrak{r}}$ rechtsregulär. Da A Vollideal ist, gilt für $f(\mathfrak{x})\in A$ stets $f(\mathfrak{r})\in A$, also haben wir $A\subseteqq A^{\bar{\mathfrak{r}}}$. Ist umgekehrt $f(\mathfrak{x})\in A^{\bar{\mathfrak{r}}}$, so haben wir $f(\mathfrak{r})\in A$. Wir bilden das Element

$$\mathfrak{f}=(f(\mathfrak{x}),f(\mathfrak{x}),\ldots,f(\mathfrak{x}))\in R_n.$$

Für dieses gilt

$$\bar{\mathfrak{f}}\circ\bar{\mathfrak{r}}=\overline{\mathfrak{f}\circ\mathfrak{r}}=\bar{\mathfrak{o}}=\bar{\mathfrak{o}}\circ\bar{\mathfrak{r}},$$

also $\bar{\mathfrak{f}}=\bar{\mathfrak{o}}, f(\mathfrak{x})\in A$. Daher gilt auch $A^{\bar{\mathfrak{r}}}\subseteqq A$.

Sei umgekehrt $A^{\bar{\mathfrak{r}}}=A$. Gilt $\bar{\mathfrak{f}}\circ\bar{\mathfrak{r}}=\bar{\mathfrak{g}}\circ\bar{\mathfrak{r}}$, so haben wir $(\bar{\mathfrak{f}}-\bar{\mathfrak{g}})\circ\bar{\mathfrak{r}}=\bar{\mathfrak{o}}$, also $(\mathfrak{f}-\mathfrak{g})\circ\mathfrak{r}\equiv\mathfrak{o}$ mod A_n. Daraus folgt für alle Komponenten f_i, g_i von $\mathfrak{f}$ bzw. $\mathfrak{g}$

$$f_i-g_i\in A^{\mathfrak{r}}=A,$$

also $\bar{\mathfrak{f}}=\bar{\mathfrak{g}}$, weshalb $\bar{\mathfrak{r}}$ rechtsregulär ist.

Aus diesem Resultat können wir folgern:

Ist A Vollideal und R/A endlich, so gilt $A^{\bar{\mathfrak{r}}}=A$ genau dann, wenn $\bar{\mathfrak{r}}$ ein invertierbares Element der Faktorhalbgruppe R_n/A_n ist.

Beweis. Aus der Endlichkeit von R/A folgt, daß auch R_n/A_n endlich ist. Bezeichnen wir die Menge der rechtsregulären Elemente von R_n/A_n mit $\mathfrak{R}$, die der invertierbaren mit $\mathfrak{J}$, so gilt natürlich $\mathfrak{J}\subseteqq\mathfrak{R}$. Andererseits ist $\mathfrak{R}$ eine Unterhalbgruppe von R_n/A_n — das Produkt zweier rechtsregulärer Elemente ist ja wieder stets rechtsregulär — mit der Einheit $\bar{\mathfrak{x}}$; da für $\bar{\mathfrak{r}}\in\mathfrak{R}$ das $\bar{\mathfrak{f}}\circ\bar{\mathfrak{r}}$ zusammen mit $\bar{\mathfrak{f}}$ alle Elemente von R_n/A_n durchläuft, hat $\bar{\mathfrak{r}}$ ein Linksinverses $\bar{\mathfrak{b}}$, und dieses ist, da es ein Rechtsinverses hat, rechtsregulär, gehört also zu $\mathfrak{R}$. Deshalb ist $\mathfrak{R}$ eine Gruppe und es gilt also auch $\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{J}$.

Bezeichnen wir die Unterhalbgruppe der rechtsregulären Elemente von R_n/A_n weiterhin mit $\mathfrak{R}$, so können wir noch sagen:

Wenn zwei Elemente von R_n/A_n zur selben Linksnebenklasse nach $\mathfrak{R}$ gehören, dann ergeben sie dieselbe Tschirnhaustransformierte von A.

Beweis. Es seien $\bar{\mathfrak{b}}$ und $\bar{\mathfrak{t}}$ Elemente von $\bar{\mathfrak{g}}\circ\mathfrak{R}$. Dann haben wir $\bar{\mathfrak{b}}=\bar{\mathfrak{g}}\circ\bar{\mathfrak{r}}_1$ und $\bar{\mathfrak{t}}=\bar{\mathfrak{g}}\circ\bar{\mathfrak{r}}_2$, daraus folgt $A^{\bar{\mathfrak{b}}}=A^{\bar{\mathfrak{g}}}=A^{\bar{\mathfrak{t}}}$.

Daß sich der soeben bewiesene Satz aber nicht umkehren läßt, also auch Elemente aus verschiedenen Linksnebenklassen von R_n/A_n dieselbe Tschirnhaustransformierte von A ergeben können, zeigt folgendes Beispiel:

Es sei $n=1$ und ϱ das Galoisfeld mit den drei Elementen $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$. A sei das Ideal (x^3-x), das ist ein Vollideal, denn es besteht aus den für alle Werte aus ϱ verschwindenden Polynomen. Man erkennt leicht, daß $R_n/A_n=R/A$ endlich ist und isomorph zur Halbgruppe $\mathfrak{F}_3$ aller eindeutigen Abbildungen von ϱ in sich. $\mathfrak{N}$ ist daher isomorph zur Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathfrak{F}_3$, das ist die Gruppe $\mathfrak{S}_3$ aller Permutationen der Elemente von ϱ. Wir betrachten nun Polynome $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die den Abbildungen $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1}\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}\bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1}\end{pmatrix}$ entsprechen. Wie man sofort erkennt, liegen diese Abbildungen in verschiedenen Linksnebenklassen von $\mathfrak{F}_3$ nach $\mathfrak{S}_3$, also liegen $\overline{f_1(x)}$ und $\overline{f_2(x)}$ in verschiedenen Linksnebenklassen nach $\mathfrak{N}$. Wir haben aber

$$A^{\overline{f_1(x)}} = A^{\overline{f_2(x)}} = (x^2 - x).$$

Wir wollen schließlich noch ein einfaches Beispiel für ein Ideal geben, das unendlich viele verschiedene Tschirnhaustransformierte hat. Es sei $n=1$, ϱ der Ring der ganzen Zahlen, $A=(0)$. Für $g \in \varrho$ haben wir dann:

$$A^g = (x-g)$$

wir erhalten also tatsächlich unendlich viele verschiedene Tschirnhaustransformierte für A.

Literatur

[1] L. Rédei, *Algebra.* I (Leipzig, 1959).
[2] W. Nöbauer, Die Operation des Einsetzens bei Polynomen in mehreren Unbestimmten, *J. reine angew. Math.*, **201** (1959), 207—220.

(Eingegangen am 29. Juli 1961)

Eine Bemerkung über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen

Von Z. JANKO in Lištica (Jugoslawien)

Wir betrachten nur endliche Gruppen. Sei π eine nichtleere Primzahlmenge. Ein Element x einer Gruppe G ist ein π-Element, wenn die Ordnung von x nur durch Primzahlen aus π teilbar ist. Das Einselement 1 von G sei ein π-Element für jede Primzahlmenge. Eine Gruppe G ist eine π-Gruppe, wenn alle ihre Elemente π-Elemente sind. Die Gruppe G ist π-abgeschlossen, wenn die Menge G_π aller π-Elemente von G eine Gruppe bildet. Die Gruppe G_π ist dann ein Hallscher π-Normalteiler von G, d. h. G_π ist eine π-Gruppe, normal in G und die Ordnungen von G_π und G/G_π sind relativ prim. Eine Untergruppe H von G ist eine nachinvariante (subnormale) Untergruppe von G, wenn sie ein Glied einer Kompositionsreihe von G ist. Der folgende Satz ist bekannt: Ein Normalteiler N einer Gruppe G ist nilpotent dann und nur dann, wenn $N/(N \cap \Phi(G))$ nilpotent ist, wo $\Phi(G)$ die Frattinische Untergruppe von G (d. h. der Durchschnitt aller maximalen Untergruppen) bezeichnet (vgl. BAER [1] oder GASCHÜTZ [3]). Das Ziel dieser Note ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Aus unserem Satz werden wir dann als Korollar einen Satz von ITÔ [5] bekommen, welcher nur in einigen Spezialfällen von WIELANDT und HUPPERT früher bewiesen war. Nach WIELANDT [6] ist nämlich eine Gruppe G nilpotent dann und nur dann, wenn die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G die Kommutatorgruppe G' von G umfaßt. Nach HUPPERT [4] ist die Kommutatorgruppe G' von G nilpotent dann und nur dann, wenn die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G die zweite Kommutatorgruppe G'' von G umfaßt.

S a t z. *Sei H eine nachinvariante Untergruppe einer Gruppe G. Genau dann ist H π-abgeschlossen, wenn $H/(H \cap \Phi(G))$ π-abgeschlossen ist.*

B e w e i s. Wenn H π-abgeschlossen ist, dann ist $H/(H \cap \Phi(G))$ π-abgeschlossen. Es ist nämlich $(H/(H \cap \Phi(G)))_\pi = H_\pi(H \cap \Phi(G))/(H \cap \Phi(G))$. Wenn $H/(H \cap \Phi(G))$ π-abgeschlossen ist, dann ist auch die Gruppe $(H\Phi(G))/\Phi(G)$ π-abgeschlossen und nachinvariant in $G/\Phi(G)$. Denn es ist $H/(H \cap \Phi(G)) \approx (H\Phi(G))/\Phi(G)$. Sei $M/\Phi(G)$ eine maximale π-abgeschlossene nachinvariante Untergruppe von $G/\Phi(G)$, welche $(H\Phi(G))/\Phi(G)$ umfaßt. Es ist möglich dann ähnlich wie im Beweis des Hilfssatzes bei ITÔ [5] zu beweisen, daß M ein Normalteiler von G ist. Ist M nicht normal in G, so gibt es zwei nachinvariante Untergruppen $M_1/\Phi(G)$ und $M_2/\Phi(G)$ von $G/\Phi(G)$ mit $M \subset M_1 \subset M_2$ derart, daß M in M_1 normal ist, in M_2 aber nicht und M_1 normal in M_2 ist. Dann gibt es eine in $M_2/\Phi(G)$ zu $M/\Phi(G)$ konjugierte Untergruppe $M^*/\Phi(G)$, welche von $M/\Phi(G)$ verschieden ist. Offenbar ist $(MM^*)/\Phi(G)$ ein π-abgeschlossener Normalteiler von $M_1/\Phi(G)$, welcher $M/\Phi(G)$ eigentlich umfaßt;

denn das Produkt zweier π-abgeschlossener Normalteiler einer Gruppe ist ein π-abgeschlossener Normalteiler dieser Gruppe (vgl. BAER [2] Seite 129). Da $(MM^*)/\Phi(G)$ in $G/\Phi(G)$ nachinvariant ist, widerspricht dies der Maximaleigenschaft von $M/\Phi(G)$. Also ist M normal in G.

Die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G ist nach BAER [1] Seite 645 schwach hyperzentral und daraus folgt nach BAER [1] Korollar 1 der Proposition 2 aus § 1, daß die Gruppe M (also auch H) π-abgeschlossen ist. Ein direkter Beweis ist der folgende. Sei $N/\Phi(G)$ ein Hallscher π-Normalteiler von $M/\Phi(G)$ d. h. $N/\Phi(G) = (M/\Phi(G))_\pi$. Dann ist M/N eine π'-Gruppe, wo π' wie üblich die komplementäre Primzahlmenge von π bezeichnet. Ist A ein Hallscher π'-Normalteiler der nilpotenten Gruppe $\Phi(G)$, d. h. $A = (\Phi(G))_{\pi'}$, dann existiert (nach einem Satz von SCHUR, s. ZASSENHAUS [7], Seite 125) eine Gruppe B so daß $N=BA$, $A\cap B=1$ gilt. Denn A ist eine charakteristische Untergruppe von $\Phi(G)$ also normal in N und die Ordnungen von A und N/A sind relativ prim. B ist offenbar eine π-Hallgruppe von M, d. h. die Ordnung von B und der Index $[M:B]$ sind relativ prim. Da A eine auflösbare Gruppe ist, so sind nach [7] Seite 126 alle Komplemente von A in N konjugiert in N. Es gilt daher $G=\mathfrak{N}(B)\cdot N$, wo $\mathfrak{N}(B)$ den Normalisator von B in G bezeichnet. Für ein beliebiges Element x aus G ist nämlich $x^{-1}Bx$ ein Komplement von A in N, d. h. es gelten $x^{-1}Bx\cdot A=N$ und $x^{-1}Bx\cap A=1$. Es existiert daher ein Element y aus N mit $x^{-1}Bx= =y^{-1}By$, also ist xy^{-1} ein Element aus $\mathfrak{N}(B)$ und daraus folgt $G=\mathfrak{N}(B)\cdot N$. Wenn X eine Untergruppe aus $\Phi(G)$ ist, dann folgt aus $G=H\cdot X$ mit einer Untergruppe H von G bekanntlich $G=H$. Wir haben daher endlich $G=\mathfrak{N}(B).\ N=\mathfrak{N}(B).\ BA=\mathfrak{N}(B).\ A=\mathfrak{N}(B)$. Die Gruppe B ist normal in G also auch in M und daraus folgt $M_\pi=B$. Die Gruppe M ist also π-abgeschlossen. Somit ist auch H π-abgeschlossen, denn es gilt $H_\pi=M_\pi\cap H=B\cap H$.

Korollar. *Sei H eine nachinvariante Untergruppe einer Gruppe G. Genau dann ist H nilpotent, wenn die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G die Kommutatorgruppe H' von H umfaßt.*

Beweis. Nach GASCHÜTZ [3] ist die Frattinische Untergruppe $\Phi(H)$ einer nachinvarianten Untergruppe H von G in der Frattinischen Untergruppe $\Phi(G)$ von G enthalten. Wenn H nilpotent ist, dann ist nach Wielandt [6] $H'\subseteqq\Phi(H)$ und nach GASCHÜTZ [3] $\Phi(H)\subseteqq\Phi(G)$, also $H'\subseteqq\Phi(G)$. Wenn $H'\subseteqq\Phi(G)$ ist, dann ist $H/(H\cap\Phi(G))$ nilpotent (sogar abelsch). Die Gruppe H ist nilpotent dann, und nur dann wenn H p-abgeschlossen für jede Primzahl p ist. Also ist H nach unserem Satz nilpotent.

Literatur

[1] R. BAER, Nilpotent characteristic subgroups of finite groups, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 633—664.
[2] R. BAER, Classes of finite groups and their properties, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 115—187.
[3] W. GASCHÜTZ, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **58** (1953), 160—170.
[4] B. HUPPERT, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **60** (1954), 409—434.
[5] N. ITÔ, Über die Frattini-Gruppe einer endlichen Gruppe, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 327—328.
[6] H. WIELANDT, Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **41** (1936), 281—282.
[7] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, I (Leipzig—Berlin, 1937).

(Eingegangen am 11. Juli 1961)

Über Teilbünde der l-Gruppen[1])

Von J. JAKUBÍK in Košice (Tschechoslowakei)

Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil (Abs. 1, 2) wird ein in [7] gestelltes Problem über die Existenz gewisser Teilmengen X_0 einer vollständigen l-Gruppe X gelöst (X_0 soll eine vollständige l-Gruppe aber kein Teilverband in X sein). Im zweiten Teil (Abs. 4, 5) ist der Begriff eines $\mathfrak{a}$-Teilverbandes $X_0 \subset X$ definiert (wobei $\mathfrak{a}$ eine unendliche Kardinalzahl ist) und es wird ein analoges Problem für $\mathfrak{a}$-Teilverbände behandelt. Im dritten Teil (Abs. 6 – 11) untersuchen wir die Mächtigkeit des Systems aller Teilmengen X_0 mit den erwähnten Eigenschaften für den Fall, wenn X ein Vektorverband (bzw. eine l-Gruppe) von endlicher Dimension ist.

1. Wir benutzen die Begriffe und Bezeichnungen aus [2]. Es sei X eine l-Gruppe. Die Ordnungsrelation, die Verbandsoperationen und die Gruppenoperation in X bezeichnen wir mit $\leqq$, $\cap$, $\cup$, $+$. Es sei X_0 eine Untergruppe von X. Setzen wir voraus, daß (im Bezug auf die Ordnungsrelation $\leqq$) X_0 eine l-Gruppe ist; die Verbandsoperationen in X_0 bezeichnen wir mit $\wedge$, $\vee$.

2. Ist $x \in X_0$, setzen wir $|x|_X = (x \cup 0) + ((-x) \cup 0)$, $|x|_{X_0} = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0)$ (vgl. [6], S. 28). Sind für X, X_0 die Voraussetzungen aus dem Abs. 1 erfüllt, so ist $|x|_{X_0} \geqq |x|_X$ für jedes $x \in X_0$.

In der Arbeit von KANTOROWITSCH, WULICH und PINSKER [7] (S. 91, Problem 5) wurde das folgende Problem aufgeworfen: *Man soll solche vollständigen l-Gruppen X und X_0 konstruieren, daß für ein Element $x \in X_0$ die scharfe Ungleichung $|x|_{X_0} > |x|_X$ bestehe, oder beweisen, daß solche Ungleichung unmöglich ist.*

Es ist leicht zu zeigen, daß die erwähnte Bedingung der folgenden äquivalent ist: es gibt ein Element $x \in X_0$, so daß $x \vee 0 > x \cup 0$. (Es ist nämlich $|x|_X = 2(x \cup 0) - x$, $|x|_{X_0} = 2(x \vee 0) - x$.) In der Terminologie von [4] soll also X_0 nur ein Teilbund (aber kein Teilverband) in X sein.

Die Lösung dieses Problems ist im Abs. 3 gegeben.

3. Ist M eine nichtleere Menge, so sei $F(M)$ die Menge aller reellen Funktionen, deren Definitionsbereich M ist; $F_1(M)$ sei die Menge aller $f \in F(M)$, welche nur ganzzahlige Werte annehmen. Die Operation $+$ sei in $F(M)$ und in $F_1(M)$ in der üblichen Weise (koordinatenweise) eingeführt. Ist $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, so können die Elemente $f \in F(M)$ als n-Tupel $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ausgedrückt werden, wobei $f(i) = y_i$.

Es sei jetzt $M = \{1, 2, 3\}$, $X = F(M)$ und X_0 die Menge aller Elemente (x, y, z) von X, wobei x, y beliebige reelle Zahlen sind und $z = x + y$. Dann ist X_0 eine

[1]) Einige Ergebnisse dieser Arbei wurden am II. Ungarischen Mathematischen Kongress (im August 1960) mitgeteilt.

(mit $F(\{1,2\})$ isomorphe) l-Gruppe. Für das Element $x=(1,-1,0)\in X_0$ gilt $x\vee 0=(1,0,1)$, $x\cup 0=(1,0,0)$. X und X_0 sind vollständige l-Gruppen (und zugleich Vektorverbände). Damit ist das im Abs. 2 erwähnte Problem (bejahend) gelöst.

B e m e r k u n g. Dieses Ergebnis über $F(\{1,2,3\})$ wird auch im Abs. 9 benutzt.

4. Es sei $\mathfrak{a}$ eine unendliche Kardinalzahl, S sei ein Verband, $A\subset S$. Wir setzen voraus, daß auch A ein Verband ist.[2]) Wir werden A einen *$\mathfrak{a}$-Teilverband von S* nennen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $B\subset A$, $\overline{\overline{B}}\leqq\mathfrak{a}$[3]), und existiert $s=\sup_S B$, so ist zugleich $s=\sup_A B$. Untersuchen wir das folgende Problem: Es ist zu entscheiden, ob es X und X_0 gibt, so daß die Voraussetzungen aus dem Abs. 1 erfüllt sind und X_0 kein $\mathfrak{a}$-Teilverband, aber für jede Kardinalzahl $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{b}$-Teilverband von X ist.

5. Es sei $\mathfrak{a}$ eine reguläre Kardinalzahl und $\omega_\mathfrak{a}$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörige Anfangszahl. Ferner sei $W(\omega_\mathfrak{a}+1)=\{b:b<\omega_\mathfrak{a}+1\}=M$, $X=F(M)$. X_0 sei die Menge aller $f\in F(M)$, für die es ein Element $x=x(f)\in M$, $x\neq\omega_\mathfrak{a}$ gibt derart, daß die Funktion f auf dem Intervall $[x,\omega_\mathfrak{a}]$ eine Konstante ist. Es ist klar, daß für X, X_0 die Voraussetzungen aus dem Abs. 1 im Kraft sind.

Es sei $B\subset X_0$, $\overline{\overline{B}}<\mathfrak{a}$ und B sei von oben beschränkt in X. Offensichtlich ist X eine vollständige l-Gruppe, also existiert in X das Element $\sup B=h$ und für jedes $x\in M$ gilt $h(x)=\sup f(x)$ $(f\in B)$. Da $\omega_\mathfrak{a}$ eine reguläre Ordinalzahl ist, gilt $\sup x(f)$ $(f\in B)=x_0<\omega_\mathfrak{a}$ im M ([1], Satz 27'; [3], S. 130). Da h eine Konstante auf dem Intervall $[x_0,\omega_\mathfrak{a}]$ ist, gehört h zu X_0, also ist zugleich $\sup_{X_0}B=h$ und X_0 ist ein $\mathfrak{b}$-Teilverband von X für jedes $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$. Wir definieren für jedes $x\in M$, $x<\omega_\mathfrak{a}$ die Funktion $f_x\in X_0$ wie folgt: $f_x(t)=1$ für $t\leqq x$, $f_x(t)=0$ für $t>x$. Die Mächtigkeit der Menge $B=\{f_x\}$ ist gleich $\mathfrak{a}$. Bezeichnen wir mit g (bzw. g') die Funktion aus X, welche folgendermaßen definiert ist: $g(t)=1$ für $t\in M$, $t\neq\omega_\mathfrak{a}$; $g(\omega_\mathfrak{a})=0$ (bzw. $g'(t)=1$ für jedes $t\in M$). Dann gilt $\sup B=g$, $\sup_{X_0}B=g'$. X_0 ist also kein $\mathfrak{a}$-Teilverband von X.

Damit haben wir folgendes bewiesen:

5. 1. S a t z. *Es sei $\mathfrak{a}$ eine reguläre Kardinalzahl. Es gibt eine vollständige l-Gruppe X und eine Teilmenge $X_0\subset X$, die zugleich eine l-Gruppe ist, derart, daß X_0 für jede Kardinalzahl $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{b}$-Teilverband aber kein $\mathfrak{a}$-Teilverband von X ist.*

5. 2. Die im Abs. 5 konstruierte l-Gruppe X_0 ist offensichtlich ein Vektorverband; X_0 ist aber nicht vollständig. Das kann man folgendermaßen einsehen. Für jedes $x\in M$, $x\neq\omega_\mathfrak{a}$ definieren wir die Funktion g_x durch transfinite Induktion wie folgt: Bezeichnet t_0 das kleinste Element von M, setzen wir $g_{t_0}(t_0)=1$ und $g_{t_0}(t)=0$ für jedes $t\in M$, $t\neq t_0$. Setzen wir voraus, daß $x\in M$, $x>t_0$ ist und daß die Funktionen g_t für $t<x$ schon definiert sind. Gibt es in M kein unterer Nachbar von x, dann setzen wir $g_x(x)=1$, $g_x(t)=0$ für jedes $t\in M$, $t\neq x$; sonst bezeichnen wir mit $x-1$ den unteren Nachbar von x und setzen $g_x(x)=1-g_{x-1}(x-1)$, $g_x(t)=0$ für jedes $t\in M$, $t\neq x$. Die Menge $\{g_x\}=G$ ist eine Teilmenge von X_0 und sie ist beschränkt

---

[2]) Ist P eine bezüglich der Relation $\leqq$ teilweise geordnete Menge und $Q\subset P$, so ist Q durch dieselbe Relation $\leqq$ teilweise geordnet. Wenn dabei $A\subset Q$ ist und in Q (in P) das Supremum s_1 (s_2) der Menge A existiert, so schreiben wir $s_1=\sup_Q A$ $(s_2=\sup_P A)$.

[3]) Wir bezeichnen mit $\overline{\overline{B}}$ die Mächtigkeit der Menge B.

[4]) Mit $[x,\omega_\mathfrak{a}]$ bezeichnen wir die Menge aller $z\in M$, für welche die Beziehung $x\leqq z\leqq\omega_\mathfrak{a}$ gilt.

in X_0. Es sei $g \in X_0$ eine obere Schranke der Menge G. Es gibt $x_0 \in M$, $x_0 < \omega_\alpha$ derart, daß im Intervall $[x_0, \omega_\alpha]$ $g(t) = c (= \text{const})$ gilt. Aus der Konstruktion der Menge G folgt, daß es ein $x_1 \in M$, $x_0 < x_1 < \omega_\alpha$ gibt, so daß das Intervall $[x_0, x_1]$ mehr als zwei Elemente enthält und $g_{x_1}(x_1) = 1$; es ist also $c \geqq 1$. Es sei $g' \in X$, $g'(t) = c$ für $t > x_1$ und $g'(t) = g_t(t)$ für $t \leqq x_1$. Dann gehört g' zu X_0, g' ist eine obere Schranke von G und es ist $g' < g$. Also besitzt G kein Supremum in X_0.

5. 3. Die folgenden Fragen bleiben offen:

a) Ist die Voraussetzung über die Regularität der Kardinalzahl α im Satz 1 notwendig? (D. h. bleibt der Satz für jede unendliche Kardinalzahl richtig?)

b) Kann man für jede reguläre Kardinalzahl die l-Gruppen aus dem Satz 1 so konstruieren, daß X, X_0 vollständige l-Gruppen bzw. vollständige Vektorverbände sind?

6. Ist X eine l-Gruppe bzw. ein Vektorverband, $U = \{u_1, \ldots, u_m\} \subset X$, so bezeichnen wir mit $C(U)$ bzw. $R(U)$ die Menge aller Elemente $z = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$, wobei α_i ganze Zahlen bzw. reelle Zahlen sind.

In den Abs. 6–8 werden Vektorverbände von endlicher Dimension untersucht. Man nennt einen Vektorverband X' von Dimension n und schreibt $\dim X' = n$, wenn X' zu einem $F(M)$, $M = \{1, \ldots, n\}$ isomorph ist; $\dim X' = 0$ bzw. $\dim X' = \infty$ bedeutet, daß $X' = \{0\}$ bzw. daß die Relation $\dim X' = n$ für keine nicht negative ganze Zahl n erfüllt ist. Wir wollen alle Teilmengen $X_0 \subset X = F(\{1, \ldots, n\})$ finden, welche Vektorverbände sind.

Ist $H = \{h_1, \ldots, h_k\} \subset X$, so bezeichnen wir mit $P(h_j)$ $(j = 1, \ldots, k)$ die Menge aller $i \in M = \{1, \ldots, n\}$, für welche $h_j(i) > 0$. Ferner sei $P'(h_j, H) = \bigcup P(h_s)$ $(s = 1, \ldots, k; s \neq j)$.

7. S a t z. *Eine Teilmenge $X_0 \neq \{0\}$ von $X = F(\{1, \ldots, n\})$ ist ein Vektorverband genau dann, wenn es eine Menge $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ gibt, so daß $X_0 = R(H)$ und H die folgende Bedingung erfüllt:*

(A) *Für jedes $i = 1, \ldots, n$ und jedes $j = 1, \ldots, k$ ist $h_j(i) \geqq 0$ und $P(h_j) \not\subset P'(h_j, H)$.*

B e w e i s. a) Es sei H eine Teilmenge von X, für welche die Bedingung (A) und die Gleichung $X_0 = R(H)$ erfüllt ist. Wählen wir ein beliebiges $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ aus. Nach (A) gibt es ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ derart, daß $i_0 \in P(h_{j_0})$, $i_0 \notin P'(h_{j_0}, H)$. Es sei $x \in X_0$, also

$$x = \sum c_j h_j \qquad (j = 1, \ldots, k), \tag{1}$$

wobei c_j reelle Zahlen sind. Aus der Voraussetzung folgt nach (1)

$$x(i_0) = \sum c_j h_j(i_0) = c_{j_0} h_{j_0}(i_0). \tag{2}$$

Ist $x = 0$, so folgt aus (2) und aus den Beziehungen $x(i_0) = 0$ und $h_{j_0}(i_0) \neq 0$, daß $c_{j_0} = 0$ ist. Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit der Darstellung von x in der Form (1).

Gilt $c_j \geqq 0$ für $j = 1, \ldots, k$, so ist nach (1) $x \geqq 0$. Mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Darstellung gilt weiter: Ist $c_j \geqq 0$ für $j = 1, \ldots, k$ und ist $c_{j_0} > 0$ mindestens für ein j_0, dann ist $x > 0$. Umgekehrt, sei $x > 0$. Da $x(i_0) \geqq 0$ und $h_{j_0}(i_0) > 0$ ist, gilt nach (2) $c_{j_0} \geqq 0$; ferner ist mindestens ein c_j positiv. Also haben wir gewonnen:

(∗) *Gilt für $x \in X_0$ die Gleichung (1), so ist $x > 0$ genau dann, wenn mindestens ein c_j positiv und alle c_j nichtnegativ sind.*

Es sei $M' = \{1, \ldots, k\}$, $Y = F(M')$. Die Abbildung $x \to (c_1, \ldots, c_k)$ ist nach $(*)$ ein Isomorphismus

$$(3) \qquad X_0 \leftrightarrow Y$$

der teilweise geordneten Gruppe X_0 auf die teilweise geordnete Gruppe Y. Da Y eine vollständige l-Gruppe ist, ist auch X_0 eine vollständige l-Gruppe. Es ist klar, daß dann X_0 ein vollständiger Vektorverband ist und daß (3) auch als ein Isomorphismus dieser Vektorverbände betrachtet werden kann.

b) Es sei $X_0 \subset X$ ein vollständiger Vektorverband. Da $\dim X = n$ ist, gilt $\dim X_0 = k \leqq n$, also gibt es ein Isomorphismus von der Form (3). Für $j \in M'$ bezeichne y_j dasjenige Element aus Y, dessen j-te Koordinate gleich 1 und alle anderen Koordinaten gleich 0 sind. Es sei weiter h_j das Element von X_0, für welches in (3) $h_j \leftrightarrow y_j$ gilt. Aus den Eigenschaften der Elemente y_j und aus (3) folgt:

(α) $h_j > 0$ für $j = 1, \ldots, k$,

(β) Jedes $x \in X_0$ ist eindeutig in der Form (1) darstellbar,

(γ) Gilt für $x \in X_0$ die Gleichung (1) und ist $x > 0$, so ist $c_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, k)$ und insbesondere ist wenigstens ein c_j positiv.

Nehmen wir an, daß $P(h_j) \subset P'(h_j, H)$ ist. Nach (α) gibt es eine reelle Zahl $c > 0$, so daß $h_j(i) < \max ch_t(i)$ $(t \in M', t \neq j)$ für jedes $i \in \bigcup P(h_t)$ $(t \in M')$. Es ist also $h_j < \sum ch_t$, $\sum ch_t - h_j > 0$ $(t \in M', t \neq j)$, was ein Widerspruch mit (γ) ist. Die Menge $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$ erfüllt also die Bedingung (A) und $X_0 = R(H)$.

8. Satz. *Es sei X_0 eine Teilmenge von $X = F(\{1, \ldots, n\})$ so, daß $X_0 = R(H)$, $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$ gilt und H die Bedingung* (A) *erfüllt. X_0 ist ein Teilverband in X genau dann, wenn $P(h_j) \cap P(h_t) = \emptyset$ für je zwei Elemente $h_j, h_t \in H$, $h_j \neq h_t$.*

Beweis. a) Es sei $h_j, h_t \in H$, $h_j \neq h_t$, $P(h_j) \cap P(h_t) \neq \emptyset$. In X gilt dann $h_j \cap h_t > 0$. In dem Isomorphismus (3) wird das Element h_j auf y_j abgebildet, wobei $y_j(i) = 0$ für $i \in M'$, $i \neq j$ und $y_j(j) = 1$ ist; ähnliches gilt für das Bild y_t von h_t. Da in Y $\inf \{y_j, y_t\} = 0$ ist, folgt aus (3) $h_j \wedge h_t = 0$, also ist X_0 kein Teilverband von X.

b) Es sei vorausgesetzt, daß für je zwei Elemente $h_j, h_t \in H$, $h_j \neq h_t$ die Beziehung $P(h_j) \cap P(h_t) = \emptyset$ gilt. Dann ist

$$(4) \qquad h_j \cap h_t = 0.$$

Es seien x, y beliebige Elemente von X_0; wir wollen zeigen, daß die Gleichungen $x \cup y = x \vee y$, $x \cap y = x \wedge y$ gelten. Es ist leicht zu beweisen, daß es genügt den Fall $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ zu untersuchen. (Bezeichnen wir nämlich $x \wedge y = z$, $x - z = x'$, $y - z = y'$, dann haben wir $x' \geqq 0$, $y' \geqq 0$, $x \cup y = (x' \cup y') + z$, $x \vee y = (x' \vee y') + z$; analoge Gleichungen sind für die Operationen $\cap$, $\wedge$ in Kraft.) Es sei also $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x = \sum c_j h_j$, $y = \sum d_j h_j$. Aus dem Isomorphismus (3) folgt $x \vee y = \sum \max (c_j, d_j) h_j$, $x \wedge y = \sum \min (c_j, d_j) h_j$. Nach (4) ist aber gleichzeitig $x = \bigcup c_j h_j$, $y = \bigcup d_j h_j$, also (vgl. [1], Kap. XIV, § 4)

$$x \cup y = \bigcup \max (c_j, d_j) = \sum \max (c_j, d_j) h_j,$$

$$x \cap y = \bigcup \min (c_j, d_j) h_j = \sum \min (c_j, d_j) h_j.$$

9. Satz. *Sei X ein Vektorverband. Jeder Vektorverband $X_0 \subset X$ ist ein Teilverband in X genau dann, wenn* $\dim X \leqq 2$.

Beweis. a) Es sei $\dim X \leqq 2$ und die Menge $X_0 \subset X$ sei ein Vektorverband. Dann ist $\dim X_0 \leqq 1$ oder $\dim X_0 = 2$. Im ersten Fall ist X_0 eine Kette, also ist X_0 ein Teilverband von X. Im zweiten Fall ist offensichtlich $X_0 = X$.

b) Es sei $\dim X \geqq 3$. Dann gibt es Elemente $e_1, e_2, e_3 \in X$ so daß $e_i \cap e_j = 0$, $e_i > 0$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$. Die Menge $X' = R(E)$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist ein Vektorverband und ein Teilverband von X, $\dim X' = 3$. Nach Abs. 3 gibt es eine Teilmenge $X_0 \subset X'$, wobei X_0 ein Vektorverband und kein Teilverband von X' ist. Also ist $X_0 \subset X$ und X_0 ist kein Teilverband von X.

10. Satz. *Es sei X ein Vektorverband,* $\dim X > 2$. *Für die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ des Systems aller Mengen $X_0 \subset X$, welche Vektorverbände und keine Teilverbände in X sind, gilt $\mathfrak{m} \geqq c$.*[5])

Beweis. Aus dem Beweise des Satzes 9 folgt, daß es genügt die Behauptung für den Fall $\dim X = 3$ zu beweisen. Es sei also $X' = F(M)$, $M = \{1, 2, 3\}$ und es sei k eine reelle Zahl, $k > 0$. Führen wir die Bezeichnungen $h_{k1} = (1, 0, k)$, $h_{k2} = (0, 1, k)$, $H_k = \{h_{k1}, h_{k2}\}$, $X_k = R(H_k)$ ein. Nach Satz 7 ist X_k ein Vektorverband und nach Satz 8 ist X_k kein Teilverband von X'. Da aus $k_1 \neq k_2$ auch $X_{k_1} \neq X_{k_2}$ folgt, ist damit der Satz 10 bewiesen.

11. Ist X eine vollständige l-Gruppe, so ist X entweder eine geordnete (=linear geordnete) Gruppe oder ein direktes Produkt von vollständigen l-Gruppen X_1, X_2, $X_1 \neq \{0\} \neq X_2$ (vgl. [2], S. 235, Ex. 4). Gibt es eine natürliche Zahl n so daß $X \neq \{0\}$ ein direktes Produkt von geordneten Gruppen $X_1, \ldots, X_n$, $X_i \neq \{0\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist, dann schreiben wir $\dim X = n$, sonst setzen wir $\dim X = \infty$; für $X = \{0\}$ setzen wir $\dim X = 0$ (vgl. [5]). Ist die l-Gruppe X zugleich ein Vektorverband und gilt in dem eben eingeführten Sinne $\dim X = n$, so besteht diese Gleichung auch im Sinne von Abs. 6.

Es sei n eine natürliche Zahl, X eine vollständige l-Gruppe, $\dim X \geqq n$. Es ist leicht zu beweisen, daß es in X Elemente $h_1, \ldots, h_n$ gibt, so daß $h_i > 0$, $h_i \cap h_j = 0$ für $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ ist. Die Menge $X' = C(H)$, $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ ist offenbar eine vollständige l-Gruppe und eine l-Untergruppe von X. Ferner ist X' mit $F_1(\{1, \ldots, n\})$ isomorph, also $\dim X' = n$.

12. Satz. *Es sei X eine vollständige l-Gruppe,* $\dim X \geqq 3$. *Bezeichnet $\mathfrak{m}$ die Mächtigkeit des Systems aller Teilmengen $X_0 \subset X$, welche vollständige l-Gruppen, aber keine Teilverbände von X sind, so gilt $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt nach Abs. 11, daß es in X eine vollständige l-Untergruppe X' gibt, so daß $\dim X' = 3$ ist. Es genügt also die Behauptung für die l-Gruppe $Y = F_1(M)$, $M = \{1, 2, 3\}$ zu beweisen. Es sei k eine natürliche Zahl. Bezeichnen wir mit Y_k die Menge aller Elemente $u = (x, y, z)$ von Y, wobei $z = k(x + y)$. Aus einer ähnlichen Überlegung wie im Abs. 3 folgt, daß Y_k eine vollständige l-Gruppe und kein Teilverband in Y ist. Sind k_1, k_2 natürliche Zahlen und $k_1 \neq k_2$, so ist $Y_{k_1} \neq Y_{k_2}$.

---

[5]) Mit c bezeichnen wir die Mächtigkeit des Kontinuums.

Literaturverzeichnis

[1] П. С. Александров, Вредение в общую теорию множеств и функций (Москва, 1948).
[2] G. Birkhoff, *Lattice theory*, rev. edition (New York, 1948).
[3] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914).
[4] H. Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie* (Berlin, 1955).
[5] P. Jaffard, Application de la théorie des filets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1125—1126.
[6] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупочрядоченных пространствах (Москва, 1950).
[7] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства, Успехи матем. наук, **VI. 3 (43)** (1951), 31—98.

(Eingegangen am 13. November 1961)

A cosine functional equation in Banach algebras*

By SVETOZAR KUREPA in Zagreb (Yougoslavia)

§ 1. Introduction

Throughout this paper $B=\{a, b, \ldots\}$ denotes a real or complex Banach algebra[1]) with unit element e; $R=\{\alpha, \beta, \ldots, t, s, \ldots\}$ the set of all real numbers, and $X=\{x, y, \ldots\}$ a Banach space.

In this paper we study the functions f: $R \to B$ such that:

$$f(t+s)+f(t-s) = 2f(t)f(s), \qquad f(0) = e, \tag{1}$$

for all $t, s \in R$, and functions F: $X \to B$ such that:

$$F(x+y)+F(x-y) = 2F(x)\,F(y), \qquad F(0) = e, \tag{2}$$

for all $x, y \in X$.

The functional equation (1) was studied in our earlier papers. In [2] we have solved this equation under the assumption that the elements of B are square matrices of finite order. In [3] B was the algebra of all bounded normal operators defined on some Hilbert space. Assuming the weak continuity of f we have proved that

$$f(t)=\cos ta=\int \cos t\lambda\, de(\lambda),$$

where a is a normal operator which does not depend on t, $e(\lambda)$ is the spectral resolution of identity which corresponds to a and integration is over the complex plane. Furthermore in [4] B was the Banach algebra of all continuous and linear operators which are defined on some Banach space Y. Assuming that Y is reflexive and separable we have proved that weak measurability of f on one interval implies weak continuity of f on R. The functional equation (2) was also considered in [4]. Assuming that B is the set of complex numbers and F is continuous it was proved that there exists an additive and continuous functional A: $X \to B$ such that

$$F(x) = \cos A(x)$$

for all $x \in X$.

It is the object of this paper to treat the general case of functional equations (1) and (2) assuming in (1) that f is measurable and in (2) that F is measurable on every

*) This work was supported by the National Science Foundation, contract NSFG 9423.

[1]) We follow the terminology of HILLE—PHILLIPS [1].

ray. We remark that the motivation for such considerations were the following problems A and B in HILLE – PHILLIPS [1], p. 278:

P r o b l e m A. Determine all measurable functions f on $(0, +\infty)$ to B such that for all t and s in $(0, +\infty)$

$$f(t+s) = f(t)\, f(s). \tag{3}$$

P r o b l e m B. Determine all functions F on a complex Banach space to a complex Banach algebra B which are measurable on rays and satisfy

$$F(x+y) = F(x)\, F(y) \tag{4}$$

for all x and y in a given cone.

It was proved ([1] pp. 280–291) that measurability of f which satisfies (3) implies continuity and that

$$f(t) = \sum_0^\infty a^n t^n/n! \qquad (a \in B)$$

for all $t \in (0, +\infty)$ provided that $f(t) \to e$ as $t \to 0$. If the function F satisfies (4), if it is measurable on every ray and has property that $\lim F(tx) = e$ $(t \to 0)$ uniformly with respect to x on some sphere, then

$$F(x) = \sum_0^\infty [P(x)]^n/n!,$$

where $P\colon X \to B$ is an additive and continuous function.

In § 2 we treat the problem A for the functional equation (1) and in § 3 we treat the problem B for the functional equation (2), i. e. we consider the following two problems:

P r o b l e m A′. Determine all measurable functions f from the set R of all real numbers in a real or complex Banach algebra B such that for all t and s

$$f(t+s)+f(t-s) = 2f(t)f(s), \quad f(0) = e.$$

P r o b l e m B′. Determine all functions F on a Banach space X to a Banach algebra B which are measurable on rays for all x, y and satisfy the functional equation

$$F(x+y)+F(x-y) = 2F(x)\, F(y), \quad F(0) = e.$$

We prove that in the first case there exists an element $a \in B$, independent of t, such that

$$f(t) = \sum_0^\infty a^n t^{2n}/(2n)! \tag{5}$$

for all $t \in R$, where the series converges uniformly and satisfies the functional equation (1). Furthermore it is always possible to imbed the Banach algebra B in another Banach algebra $\hat{B}$ which consists of all square matrices of order 2, the elements of which are elements of B, in such a way that

$$\hat{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix} = \sum_0^\infty (\hat{a}t)^{2n}/(2n)!$$

where $\hat{a}$ is an element of $\hat{B}$. If the element a in (5) possesses a regular square root in B then the functional equation (1) can be reduced to the functional equation of type (3). If 1) B is a Banach algebra of bounded linear operators which are defined on some Hilbert space; 2) the element a in (5) possesses a regular square root in B and 3) $\sup_{t\in R} \|f(t)\| < +\infty$, then

$$f(t) = \sum_0^\infty (-1)^n (td_0)^{2n}/(2n)!,$$

where the operator d_0 is similar to a selfadjoint operator, i. e. there is a bounded and regular operator q such that $q\,d_0 q^{-1}$ is a selfadjont operator.

Concerning the problem B' we prove in § 3 that

$$F(x) = \sum_0^\infty [A(x)]^n/(2n)!$$

for all $x\in X$, where $A\colon X\to B$. The function A is continuous if and only if $\lim F(tx) = e$ $(t\to 0)$ uniformly with respect to x in some sphere. If $\|e-A(x)\|<1$ for some x then $A(x)=[L(x)]^2$, where $L\colon X\to B$ is an additive function which is continuous if A is continuous.

§ 2. Problem A′ for a cosine functional equation

Theorem 1. *Let $R=\{\alpha, \beta, \ldots, t, s, \ldots\}$ be the set of all real numbers, $B=\{a, b, \ldots\}$ a real or complex Banach algebra with unit e and $f\colon R\to B$ a single-valued measurable function such that*

$$f(t+s)+f(t-s) = 2f(t)f(s), \quad f(0) = e, \tag{6}$$

holds for all $t, s\in R$. Then there is one and only one element $a\in B$ such that

$$f(t) = e+\frac{at^2}{2!}+\frac{a^2t^4}{4!}+\frac{a^3t^6}{6!}+\ldots = \sum_0^\infty \frac{a^n t^{2n}}{(2n)!}, \tag{7}$$

the series (7) being absolutely convergent for every $t\in R$.

Proof. From (6) and $f(0)=e$ we see that $f(-t)=f(t)$ and $f(t)f(s)=f(s)f(t)$ for every pair $t, s\in R$. Since f is measurable the numerical function $\|f(t)\|$ is measurable in the Lebesgue sense. Hence there is a perfect set P of strictly positive and finite measure on which $\|f(t)\|$ is bounded. This in the same way as in [3] implies that $\|f(t)\|$ is bounded on every finite interval. Since f is measurable and locally bounded it is locally integrable in the Bochner sense ([1], theorem 3. 7. 4, p. 80).

Now set $f_0(t) = f(t) - e$. The function f_0 is measurable and locally bounded. Furthermore it satisfies the functional equation:

$$f_0(t+s)+f_0(t-s) = 2f_0(t)+2f_0(s)+2f_0(t)f_0(s). \tag{8}$$

If in (8) we set $u = t+s$ and $v = t-s$, then we get:

$$f_0(u)+f_0(v) = 2f_0\left(\frac{u+v}{2}\right)+2f_0\left(\frac{u-v}{2}\right)+2f_0\left(\frac{u+v}{2}\right)f_0\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Integration from 0 to 1 leads to:

$$f_0(v) = \left[-\int_0^1 + 4\int_{\frac{v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} + 4\int_{-\frac{v}{2}}^{\frac{1-v}{2}}\right] f_0(u)\,du + 4\int_{\frac{v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} f_0(u) f_0(u-v)\,du.$$

We assert that f_0 is a continuous function. In order to prove this it is sufficient to consider the integral

$$\int_{\frac{v}{2}}^{\frac{1+v}{2}} f_0(u) f_0(u-v)\,du = \left[\int_{\frac{v}{2}}^{0} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{v}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}}\right] f_0(u) f_0(u-v)\,du. \tag{9}$$

Suppose that $v \to v_0$. Then

$$\left\| \int_\alpha^{\alpha+\frac{v}{2}} f_0(u) f_0(u-v)\,du - \int_\alpha^{\alpha+\frac{v_0}{2}} f_0(u) f_0(u-v_0)\,du \right\| \leqq$$

$$\leqq 3M^2 |(v-v_0)/2| + M \int_\alpha^{\alpha+\frac{v_0}{2}} \|f_0(u-v) - f_0(u-v_0)\|\,du,$$

where M is a suitably chosen constant. But the last integral tends to zero as $v \to v_0$ ([1], theorem 3. 8. 3, p. 86). Taking $\alpha = 0$ and $1/2$ we find that two of the integrals on the right hand side of (9) are continuous functions of v. For the third integral in (9) we have:

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(u) f_0(u-v)\,du - \int_0^{\frac{1}{2}} f_0(u) f_0(u-v_0)\,du \right\| \leqq M \int_0^{\frac{1}{2}} \|f_0(u-v) - f_0(u-v_0)\|\,du \to 0.$$

Thus f_0 is a continuous function on R and so is f too. This implies that

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t)\,dt = f(0) = e.$$

Hence there is a number γ such that

$$\left\| \frac{1}{\gamma} \int_0^\gamma f(t)\,dt - e \right\| < 1,$$

and consequently such that

$$c = \left[\int_0^\gamma f(t)\,dt\right]^{-1}$$

exists.

Now we integrate (6) from 0 to α with respect to s. We get

$$2f(t)\int_0^{\alpha} f(s)\,ds = \int_t^{\alpha+t} f(s)\,ds + \int_{-t}^{\alpha-t} f(s)\,ds. \tag{10}$$

From (10) we find:

$$2[f(t+u)-f(t)]\int_0^{\alpha} f(s)\,ds = \left[\int_{\alpha+t}^{\alpha+t+u} + \int_{\alpha-t}^{\alpha-t-u} - \int_t^{t+u} - \int_{-t}^{-t-u} f(s)\,ds\right]. \tag{11}$$

If in (11) we set $\alpha=\gamma$, multiply by c, divide by u and let $u\to 0$, we get:

$$2\lim_{u\to 0}[f(t+u)-f(t)]/u = [f(\gamma+t)-f(\gamma-t)]c. \tag{12}$$

Thus

$$g(t) = df/dt = \lim_{u\to 0}[f(u+t)-f(t)]/u \tag{13}$$

exists for every t, i. e. f is a differentiable (in fact strongly differentiable) function. Now we divide (11) by u and let $u\to 0$. We get

$$2g(t)\int_0^{\alpha} f(s)\,ds = f(\alpha+t)-f(\alpha-t). \tag{14}$$

From (14) and (6) we find:

$$f(t+s) = f(t)f(s)+g(t)\int_0^{s} f(u)\,du \tag{15}$$

which, because of the symmetry, leads to

$$g(t)\int_0^{s} f(u)\,du = g(s)\int_0^{t} f(u)\,du. \tag{16}$$

If we take $s=\gamma$ in (16) we get:

$$g(t)/t = cg(\gamma)(1/t)\int_0^{t} f(u)\,du.$$

Thus

$$\lim_{t\to 0} g(t)/t = cg(\gamma) = a \tag{17}$$

exists and it is an element of B. If we divide (16) by t and allow $t\to 0$ we find:

$$g(s) = a\int_0^{s} f(u)\,du, \tag{18}$$

i. e.

$$df/dt = a\int_0^{t} f(u)\,du. \tag{19}$$

Since $f(0)=e$ and $g(0)=0$ (in (18) set $s=0$), from (19) we find:

$$f(t) = e+a\int_0^t ds \int_0^s f(u)\,du = e+a\int_0^t (t-s)f(s)\,ds. \tag{20}$$

The iteration method applied to the integral equation (20) leads to

$$f(t) = e+\frac{at^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n t^{2n}}{(2n)!}+\frac{a^{n+1}}{(2n+1)!}\int_0^t (t-s)^{2n+1} f(s)\,ds$$

from which (6) follows. The uniqueness of the solution of (20) can be proved in the usual way. The uniqueness of a is obvious from (7) and direct calculation shows that (7) satisfies (2). Thus theorem 1 is proved.

If in B an element b exists such that $b^2=a$, then (7) can be written in the form:

$$f(t) = \sum_0^\infty (tb)^{2n}/(2n)! = [\exp tb+\exp(-tb)]/2 \tag{21}$$

which is natural to call the hyperbolic cosine. However, if b exists it is not unique. In that case as a rule there are infinitely many square roots of a and (7) is written in the form $f(t)=\operatorname{ch} tb$. However, f is in fact the function of $b^2=a$ which is unique.

Generally the square root of a does not exist in B and the solution (7) can not be written in the form (21). This also follows from theorem 3 of the paper [2]. We illustrate the situation by the example. Let B be the Banach algebra of 2×2 complex matrices. The function $f(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ t^2 & 1\end{pmatrix}$ satisfies (6) and it is not of the form (21). In this case $a=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ and there is no 2×2 matrix b with the property that $b^2=a$. On the other hand the matrix

$$\hat{a} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1\\ \hline -1 & 0 & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

has the property that

$$\hat{a}^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

In this case the 2×2 matrix function

$$f(t)=e+\frac{at^2}{2!}+\frac{a^2t^4}{4!}+\frac{a^3t^6}{6!}+\dots$$

can be written by use of the 4×4 matrix function in the form

$$\hat{f}(t)=\begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t)\end{pmatrix}=\hat{I}+\frac{\hat{a}^2t^2}{2!}+\frac{\hat{a}^4t^4}{4!}+\dots=\text{ch } t\hat{a}.$$

This example suggests the idea of imbedding the Banach algebra B in another Banach algebra $\hat{B}$ which has the property that any $a\in B$ as an element in $\hat{B}$ has a square root in $\hat{B}$; i. e., there is at least one element $\hat{b}\in\hat{B}$ such that $\hat{b}^2=\hat{a}$. The construction of such a Banach algebra $\hat{B}$ is very simple. It is sufficient to consider all 2×2 matrices $\hat{x}$, $\hat{y}$ the elements x_{ij}, y_{ij} $(i,j=1,2)$ of which are elements of B and to define the usual matrix operations between such matrices. Introducing the norm in $\hat{B}$ by the formula:

$$\|\hat{x}\|=\sum_{i,j=1}^{2}\|x_{ij}\|,$$

one easily verifies that $\hat{B}$ is a Banach algebra. In the Banach algebra $\hat{B}$ we imbed (isomorphically but not isometrically) the Banach algebra B by the correspondence:

$$a\to\hat{a}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}\qquad (a\in B).$$

Now, simple calculation shows that

$$\begin{pmatrix} e+\dfrac{a}{4} & e-\dfrac{a}{4} \\ -\left(e-\dfrac{a}{4}\right) & -\left(e+\dfrac{a}{4}\right)\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}$$

for every $a\in B$, i. e. in $\hat{B}$ every element $a\in B$ has a square root.

The function

$$\hat{f}(t)=\begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t)\end{pmatrix}$$

satisfies all conditions of theorem 1 and

$$\hat{f}(t)=\begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t)\end{pmatrix}=\text{ch } t\begin{pmatrix} e+\dfrac{a}{4} & e-\dfrac{a}{4} \\ -\left(e-\dfrac{a}{4}\right) & -\left(e+\dfrac{a}{4}\right)\end{pmatrix}$$

holds for every t, where the hyperbolic cosine is defined by the series. Thus we have:

Theorem 2. *Let R, B and f be the same as in theorem 1 and let $\hat{B}$ be a Banach algebra of all 2×2 matrices the elements of which are elements of B and the norm of an $\hat{x} \in \hat{B}$ is defined by the formula:*

$$\|\hat{x}\| = \sum_{i,j=1}^{2} \|x_{ij}\|.$$

If we imbed B in $\hat{B}$ by the correspondence

$$a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

then

$$\begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix} = [\exp t\hat{a} + \exp(-t\hat{a})]/2$$

for every $t \in R$, where $\hat{a}$ can be taken as

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} e+\frac{a}{4} & e-\frac{a}{4} \\ -\left(e-\frac{a}{4}\right) & -\left(e+\frac{a}{4}\right) \end{pmatrix}, \quad a \in B,$$

and it does not depend on t.

If in B there is a regular element b such that $b^2 = a$, then the problem of solving (6) can be reduced to the problem of solving the functional equation $k(t+s) = k(t) \cdot k(s)$, $\lim k(t) = k(0) = e$ $(t \to 0)$ in B. In order to prove this we substitute $s+u$ for s in (15) and from the so obtained result we subtract (15). We get:

$$f(t+s+u) - f(t+s) = [f(s+u) - f(s)]f(t) + g(t) \int_s^{s+u} f(v)\, dv.$$

If we divide this by u and allow $u \to 0$ we get:

$$g(t+s) = g(s)\, f(t) + g(t)\, f(s). \tag{22}$$

Now write $a = b^2$ and define $h(t) = b^{-1} g(t)$. Then (15), (18) and (22) become:

$$f(t+s) = f(t)f(s) + h(t)h(s), \quad h(s) = b\int_0^s f(u)\, du, \quad h(t+s) = h(s)f(t) + h(t)f(s),$$

respectively. If we set

$$k(t) = f(t) + h(t) \tag{23}$$

then these equations imply:

$$k(t+s) = k(t)\, k(s), \qquad k(0) = e.$$

But

$$dk/dt = df/dt + dh/dt = g(t) + b\, f(t) = b\, h(t) + b\, f(t) = b\, k(t).$$

Now $dk/dt = b\,k(t)$ and $k(0) = e$ lead to

$$k(t) = e + b\int_0^t k(s)\,ds$$

which by iteration gives

$$k(t) = \sum_0^\infty (tb)^n/n! = \exp tb$$

(cf. [1], p. 68). Thus

$$f(t) = [k(t)+k(-t)]/2 = [\exp tb + \exp(-tb)]/2.$$

Suppose that f satisfies all conditions of theorem 1 and that $M = \sup_{t\in R} \|f(t)\| < +\infty$. This and (14) for $\alpha=\gamma$ imply:

$$\|g(t)\| \leqq \|f(t+s)-f(t-s)\|\cdot\|c\|/2 \leqq M\|c\|;$$

i. e. $\sup_{t\in R}\|g(t)\| < +\infty$. In the case that a regular element b exists in B such that $b^2=a$ we derive:

$$\sup_{t\in R}\|k(t)\| = \sup_{t\in R}\|f(t)+h(t)\| < +\infty.$$

Thus in this case the one-parameter group $k(t)$ is uniformly bounded on R. If B is the Banach algebra of all bounded and linear operators on a Hilbert space endowed with the usual structure of a Banach space, then the well known result of BÉLA SZ.-NAGY [5] implies that the group $k(t)$ is similar to a one-parameter group of unitary operators; i. e., there is a nonsingular and bounded selfadjoint operator q such that

$$q^{-1}k(t)q$$

is a unitary operator for every $t\in R$. Since in our case $k(t) = \exp tb$ we find that $q^{-1}k(t)q = \exp tq^{-1}bq$ is a unitary group of operators. But this is possible if and only if $d = iq^{-1}bq$ is a selfadjoint operator. Thus

$$f(t) = q[\exp itd + \exp(-itd)]q^{-1}/2 = \cos td_0$$

where $d_0 = qdq^{-1}$. In such a way we have:

Theorem 3. *Let B be the Banach algebra of all bounded linear operators on some Hilbert space endowed with the usual structure of a Banach space, f the function which satisfies all conditions of theorem* 1 *where measurability is meant in the uniform operator topology.*

Then there exists a bounded operator $a\in B$ such that

$$f(t) = \sum_0^\infty a^n t^{2n}/(2n)! \tag{24}$$

for all $t\in R$.

If in addition: $\sup_{t\in R}\|f(t)\| < +\infty$ and the "infinitesimal operator" a which appears in (24) *possesses a regular square root in B, then $f(t)=\cos td_0$ where d_0 is similar to a selfadjoint operator, i. e. there is a regular element $q\in B$ such that $d=qd_0q^{-1}$ is selfadjoint and thus $f(t) = q^{-1}(\cos td)q$.*

§ 3. Problem B′ for the cosine functional equation

In this paragraph we prove the following theorem:

Theorem 4. *Let $R=\{\alpha, \beta, \ldots, t, s, \ldots\}$ be the set of all real numbers, $X=\{x, y, \ldots\}$ a Banach space, B a Banach algebra with unit element e, $F\colon X \to B$ the function which satisfies the functional equation*

$$F(x+y)+F(x-y) = 2F(x)F(y), \quad F(0) = e, \tag{25}$$

for all $x, y \in X$. Suppose the function F is measurable on every ray i. e. $F(tx)$ is measurable as a function of $t \in R$ for every $x \in X$. Then

(I) *there exists a function $A(x)\colon X \to B$ such that*

$$F(x) = \sum_0^\infty [A(x)]^n/(2n)!, \tag{26}$$

$$A(tx)=t^2A(x) \qquad (x \in X, t \in R), \tag{27}$$

$$A(x)A(y)=A(y)A(x), \tag{28}$$

$$A(x+y)+A(x-y) = 2A(x)+2A(y), \tag{29}$$

$$A^2(x+y)+A^2(x-y) = 2A^2(x)+2A^2(y)+12A(x)A(y) \tag{30}$$

for all $x, y \in X$.

(II) *The function $A(x)$ is continuous if and only if*

$$\lim_{t \to 0} F(tx)=e \tag{31}$$

uniformly for x in some sphere.

(III) *If $\|e-A(x_0)\|<1$ for at least one $x_0 \in X$, then an additive function $L\colon X \to B$ exists such that $A(x) = [L(x)]^2$ for every $x \in X$ and therefore in this case*

$$F(x) = [\exp L(x)+\exp L(-x)]/2 = \operatorname{ch} L(x).$$

If $A(x)$ is continuous so is $L(x)$.

Proof:

(I) For a given $x \in X$, the function $F_x(t) = F(tx)$ as a function of $t \in R$ satisfies all conditions of theorem 1. Hence an element $A(x) \in B$ exists such that

$$F(tx) = \sum_0^\infty [A(x)]^n t^{2n}/(2n)! \tag{32}$$

holds for all $t \in R$. Obviously (32) implies (27). Further $F(tx)\,F(ty) = F(ty)\,F(tx)$ for all $t \in R$ and $x, y \in X$ together with (32) leadr to (28). Replacing in (25) x by tx and y by ty we get

$$F_{x+y}(t)+F_{x-y}(t) = 2F_x(t)\,F_y(t)$$

which together with (32) implies (29) and (30).

(II) Next we observe that a symmetric function

$$M(x, y) = [A(x+y-A(x-y)]/4$$

is, because of (29), an additive function of x[1]). This and (27) imply that $M(x, y)$ is an additive and real-homogeneous function of each of its arguments. From (29) and the definition of M we find:

$$A(x+y) = A(x)+A(y)+2M(x, y). \tag{33}$$

Now, suppose that $A(x)$ is continuous in the sphere S: $\|x-x_0\| < \varrho$, where we can without loss of generality take $x_0 \neq 0$. This assumption and (33) imply that $M(x_0, y)$ as a function of y is continuous in the sphere S_0: $\|y\| < \varrho$. Hence $A(y) = A(x_0+y) - A(x_0) - 2M(x_0, y)$ is continuous in the sphere S_0. The continuity of $A(y)$ in S_0 and (27) imply the continuity of $A(y)$ on every finite sphere. Thus $M(x, y)$ is continuous on every finite sphere. Since it is an additive function it is bounded and therefore the function $\|A(x)\| = \|M(x, x)\|$ is bounded on every finite sphere. Suppose that $\|A(x)\| < \alpha^2$, $\alpha > 0$, for all x from some finite sphere. This and (32) imply:

$$\|F(tx)-e\| \leqq \sum_{1}^{\infty} \|A(x)\|^n t^{2n}/(2n)! \leqq \frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})-1.$$

But this tends to zero as $t \to 0$, i. e. if $A(x)$ is continuous in some finite sphere then (31) holds uniformly for every x from any finite sphere.

Conversely, suppose that (31) holds uniformly in $x \in S$: $\|x-x_0\| < \varrho$. We then assert that $A(x)$ is a continuous function. First of all (31) implies the existence of a number $\gamma > 0$ such that

$$\|F(tx)-e\| < 1/2 \tag{34}$$

for all $|t| < \gamma$ and $x \in S$. This implies that $F(x)$ is bounded on the sphere S': $\|x-x_0\| < \gamma\varrho/2$. This and (25) lead to the boundedness of $F(x)$ on every finite sphere. Thus $F(tx)$ as a function of t is integrable on every finite interval for any $x \in S$. Now (34) leads to:

$$\left\| e - \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} F(tx)\,dt \right\| \leqq 1/2 \tag{35}$$

for every $x \in S$. From (35) we conclude that

$$C_x = \left[\int_0^{\gamma} F(tx)\,dt\right]^{-1} \tag{36}$$

exists for every $x \in S$. Moreover we have:

$$C_x = \frac{1}{\gamma}\sum_{0}^{\infty}\left(e - \frac{1}{\gamma}\int_0^{\gamma} F(tx)\,dt\right)^n$$

from which we find:

$$\|C_x\| \leqq 2/\gamma \tag{37}$$

[1]) Our attention on this fact was drawn by professor IVAN VIDAV at another occasion.

for every $x \in S$. In the same way as in the proof of theorem 1 we have the existence of

$$G_x(t) = \lim_{u\to 0}[F_x(t+u) - F_x(t)]/u$$

for every $x \in S$ and the function $G_x(t)$ has the property that:

$$2G_x(t) = [F_x(\gamma+t) - F_x(\gamma-t)]C_x. \tag{38}$$

Now (38), (37), and the fact that $F(x)$ is bounded on every finite sphere imply:

$$\sup_{x\in S}\|G_x(\gamma)\| < +\infty. \tag{39}$$

Furthermore we have

$$\lim_{t\to 0} G_x(t)/t = C_x G_x(\gamma) = A(x). \tag{40}$$

Now, (40), (37) and (39) imply $\sup_{x\in S}\|A(x)\| < +\infty$, i. e. the function $A(x)$ is bounded on one sphere. This and (27) imply that $A(x)$ is bounded on every finite sphere. Since the additive function $M(x, y)$ is bounded on every sphere it is continuous everywhere and therefore $A(x) = M(x, x)$ is also an everywhere continuous function.

(III) Suppose that $\|e - A(x_0)\| < 1$ for some $x_0 \in X$. Then

$$\sum_0^\infty \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}[e - A(x_0)]^n$$

converges to $[A(x_0)]^{-1/2}$, i. e. $[A(x_0)]^{-1/2}$ exists and it commutes with $A(x)$ and therefore with $M(x, y)$ for every pair $x, y \in X$.

Now we take the square of (29) and from this we substract (30). We get:

$$A(x+y)A(x-y) = [A(x) - A(y)]^2 \tag{41}$$

which together with (33) leads to:

$$[M(x, y)]^2 = A(x)A(y). \tag{42}$$

From (42) and the property of $[A(x_0)]^{-1/2}$ to commute with $M(x, y)$ we find

$$A(x) = [A(x_0)]^{-1}[M(x, x_0)]^2 = [L(x)]^2$$

where $L(x) = [A(x_0)]^{-1/2} M(x, x_0)$ is an additive function from X to B. If $A(x)$ is continuous then $M(x, y)$ is continuous and therefore $L(x)$ is also continuous. Thus theorem 4 is proved.

Remark 1. Let X be a real Hilbert space and B the algebra of all 4×4 matrices over real numbers. The norm of a matrix $b = (b_{pq})$ will be defined as $\|b\| = \sum_{p,q=1}^{4}|b_{pq}|$. For an arbitrary bounded selfadjoint operator $A\colon X \to X$ set:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(Ax, x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(Ax, x) & 0 \end{pmatrix}.$$

The functional $F(x)=e+A(x)/2$ satisfies the functional equation (2) and $A(x)$ is a continuous function of $x\in X$. We assert that there is no additive and continuous function L: $X\to B$ such that $A(x)=[L(x)]^2$. Indeed, if such a matrix $L(x)=$ $=(l_{pq}(x))\,(p,q=1,2,3,4)$ would exist, then each matrix element $l_{pq}(x)$ as a continuous and additive functional would have the form $l_{pq}(x)=(x,x_{pq})$, where x_{pq} are uniquely determined vectors. Thus the quadratic form $A(x)=2(Ax,x)$ would be determined by its values on 16 vectors. Since this is impossible the assertion is proved. However in this example the condition $\|e-A(x)\|<1$ is not satisfied for any x. On the other hand the existence of such an x is not necessary. Indeed, if in the above example we take $X=R$, $A(x)=A(t)=2t^2$, then $\|e-A(x)\|=4(1+t^2)$ and $A(t)=L^2(t)$ with $L(t)=2^{1/2}t$.

Remark 2. Using the results obtained in this paper and in [4] one can generalise some results of the paper [4], e. g. one can solve the functional equation $f(t+s)+f(t-s)=2f(t)g(s)$ where f,g: $R\to B$. If f is measurable, $g(0)=e$ and for some $s\neq 0$ $\|e-g(s)\|<1$ then $g(t)=\cos at$ and $f(t)=b\cos at+c\sin at$, where a, b and c are fixed elements of B.

References

[1] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, (New York, 1957).
[2] S. Kurepa, A cosine functional equation in n-dimensional vector space, *Glasnik mat. fiz. ast.*, **13** (1958), 169—189.
[3] S. Kurepa, A cosine functional equation in Hilbert space, *Canadian J. Math.*, **12** (1960), 45—50.
[4] S. Kurepa, On some functional equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **19** (1960), 149—158.
[5] B. Sz.-Nagy, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, **11** (1947), 152—157.

UNIVERSITY OF ZAGREB
AND UNIVERSITY OF MARYLAND

(Received July 13, 1961)

On the functional calculus of an operator measure

By JACOB FELDMAN in Berkeley (California, USA)

1. Introduction

Let T be a set, $\mathbf{B}$ a σ-algebra of subsets of T, and F an operator measure on $\mathbf{B}$. That is,

(1) For each S in $\mathbf{B}$, $F(S)$ is a nonnegative bounded linear operator on the Hilbert space H,

(2) If S is the union of disjoint sets $S_1, S_2, \dots$ in $\mathbf{B}$ then $F(S) = \sum_{n=1}^{\infty} F(S_n)$, where the sum converges in the strong topology,

(3) $F(T) = I$ (the identity operator on H).

NAĬMARK has shown ([1], p. 266, or [2]) that $F(\cdot)$ can be written in the form $PE(\cdot)|H$, where E is a projection-valued measure with values in some Hilbert space K containing H, and P is the orthogonal projection from K onto H.

Let $L_\infty(F)$ be the class of all bounded complex-valued Borel measurable functions on T, identified modulo functions f which are F-null in the sense that $F(\{t|f(t)\neq 0\})=0$. If H is separable, then by choosing a sequence $x_1, x_2, \dots$ of unit vectors which span H, and setting $m(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(F(S)x_n, x_n)$, one sees that $L_\infty(F)$ is just $L_\infty(m)$. In any case, we can put the usual algebra, norm, and $*$ structure on $L_\infty(F)$.

There is defined a map φ from $L_\infty(F)$ to bounded operators on H by $\varphi(f) = P\int f(t)dE(t)|H$. The map φ is characterized by the property that $(\varphi(f)x, y) = \int f(t)d(F(t)x, y)$ for all x, y in H. Clearly φ is a linear, norm-nonincreasing, $*$-preserving, positivity-preserving map.

Sometimes we shall write $\int f(t)dF(t)$ for $\varphi(f)$. Indeed, this is a true equation if the operator integral is interpreted in the weak topology.

Of special interest is the case where T is the unit circle C in the complex plane, $\mathbf{B}$ consists of the Borel sets, and F is what is called a *strong* operator measure: that is, setting $A = \int t dF(t)$,

$$\int t^n dF(t) = \begin{cases} A^n & \text{if } n>0, \\ (A^*)^{-n} & \text{if } n<0. \end{cases} \tag{4}$$

Clearly $\|A\| \leqq 1$. Furthermore, if we are given a *preassigned* A of norm $\leqq 1$, then, by a theorem of SZ.-NAGY [3], [4], there is precisely *one* strong operator measure F on the Borel sets of the unit circle related to A by $A = \int t\,dF(t)$. Without assumption (4), of course, there are many F for a given A. The corresponding operator $U = \int t\,dE(t)$ on the containing Hilbert space K is called the *unitary dilation* of A, and the operator $\varphi(f)$ is precisely $Pf(U)|H$. In this case, the function φ becomes multiplicative on polynomials in t, and hence also on their bounded F-a. e. limits. (Cf.[5], [6].) In the present paper, we do *not* make assumption (4). However, the results are new even for strong operator measures.

Let $C(r)$ be the circle of radius r in the complex plane, and $D(r)$ the closed disk of radius r. If $r=1$, we write simply C and D. For any bounded operator A on H, $\sigma(A)$ is defined as the spectrum of A, and $\alpha(A)$ its approximate point spectrum (which we interpret as including the point spectrum). Thus $\alpha(A) \subset \sigma(A) \subset D(\|A\|)$. In the following theorems, statements are made about $\alpha(A) \cap C(\|A\|)$. It should be noticed, however, that this is the same set as $\sigma(A) \cap C(\|A\|)$, since the boundary of $\sigma(A)$ is always contained in $\alpha(A)$ (this fact was pointed out to me by G. ORLAND).

In the following theorems F is a fixed operator measure on C, and we utilize the notation above.

Theorem 1. *For any $f \in L_\infty(F)$, $C(\|f\|) - \alpha(\varphi(f))$ is equal to the intersection of $C(\|f\|)$ with the union of all those open sets U of the plane for which $\|F(f^{-1}(U))\| < 1$.*

For $f \in L_\infty(F)$, let $\sigma(f)$ denote the spectrum of f as an element in the algebra $L_\infty(f)$. Thus z is in $\sigma(f)$ if and only if $f^{-1}(U)$ is F-nonnull for each neighborhood U of z. Furthermore $\sigma(f) \subset D(\|f\|)$, and $\sigma(f) \cap C(\|f\|)$ is nonempty.

Corollary. (a) *If φ is norm-preserving, then $\|F(S)\| = 1$ for all F-nonnull S in* **B**.

(b) *If $\|F(S)\| = 1$ for all F-nonnull S in* **B**, *then not only is φ norm-preserving, but in fact*

$$\alpha(\varphi(f)) \cap C(\|f\|) = \sigma(f) \cap C(\|f\|).$$

Theorem 2. *Let F be an operator measure on the Borel sets of the complex unit circle, and let F be absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. Let φ be norm-preserving when restricted to those functions in $L_\infty(F)$ which have representatives in H_∞. Then φ is norm-preserving on all of $L_\infty(F)$.*

I would like to thank Professor M. SCHREIBER for a series of discussions on this subject, from which I have profited considerably.

2. Proofs of the Theorems

Proof of Theorem 1. First suppose that for each open neighborhood U of z_0 we have $\|F(f^{-1}(U))\| = 1$, and $|z_0| = \|f\|$. We wish to show that z_0 is in $\alpha(\varphi(f))$. There is clearly no loss of generality in assuming $\|f\| = 1$ and $z_0 = 1$, since the problem can be shifted to this by using $z_0^{-1}f$ instead of f. Choose $\varepsilon > 0$. Let U be an open disk about 1, of radius $2\varepsilon/3$. Write S for $f^{-1}(U)$, and choose x of norm 1 in H such that $(F(S)x, x) > 1 - \varepsilon/3$. Then $(F(C-S)x, x) < \varepsilon/3$. We write $(\varphi(f)x, x)$ as

$$\int_S d(F(t)x, x) + \int_S (f(t)-1)\,d(F(t)x, x) + \int_{C-S} f(t)\,d(F(t)x, x).$$

Thus:

$$|(\psi(f)x, x)-1| \leqq \left|\int_S d(F(t)x, x)-1\right| + \int_S |f(t)-1|\, d(F(t)x, x) + \int_{C-S} d(F(t)x, x) <$$

$$< |(F(S)x, x)-1| + \varepsilon/3 + (F(C-S)x, x) < \varepsilon.$$

That is, $(\varphi(f)x, x)$ can be made arbitrarily close to 1 by appropriate choice of x. But since both $\varphi(f)x$ and x are vectors of length $\leqq 1$, this implies that $\varphi(f)x$ can be made arbitrarily close to x by appropriate choice of x, i. e. $1 \in \alpha(\varphi(f))$.

Conversely, suppose that z_0 is in $\alpha(\varphi(f)) \cap C(\|f\|)$. We wish to show that $\|F(f^{-1}(U))\| = 1$ for each open neighborhood U of z_0. Again there is no loss of generality in assuming that $\|f\|$ and z_0 are 1. Choose $\varepsilon > 0$, and x of norm 1 in H such that

$$|1-\psi((f)x, x)| < \varepsilon^2,$$

that is

$$\left|1-\int f(t)\, d(F(t)x, x)\right| < \varepsilon^2.$$

Then

$$\varepsilon^2 > \mathrm{Re}\left(1-\int f(t)\, d(F(t)x, x)\right| = \int (1-\mathrm{Re} f(t))\, d(F(t)x, x),$$

where "Re" means "real part". Let $U_\varepsilon = \{z | \mathrm{Re}\, z \geqq 1-\varepsilon\}$. Let $S_\varepsilon = f^{-1}(U_\varepsilon)$. Then we have $(F(C-S_\varepsilon)x, x) < \varepsilon$, so that $\|F(S_\varepsilon)\| > 1-\varepsilon$. Since S_ε decreases as ε decreases, it follows that $\|F(S_\varepsilon)\| = 1$. If now U is *any* open neighborhood of 1 in the complex plane, then if ε is chosen sufficiently small we will have $U_\varepsilon \subset U$. Thus, $\|F(f^{-1}(U))\| = 1$ for any neighborhood U of 1.

Proof of the Corollary. (a) Suppose $0 < \|F(S)\| < 1$ for some S in $\mathbf{B}$. Let f be the characteristic function of S. Then $\|f\| = 1$, while $\|\varphi(f)\| = \|F(S)\| < 1$.

(b) This follows directly from Theorem 1.

Proof of Theorem 2. Let F be as described in our assumptions, and $0 < \|F(S)\| = c < 1$. Let $u(z)$ be the harmonic function which has the boundary value 0 on S and $\log(1-c/2)$ on $C-S$. Let u^* be its harmonic conjugate. Then e^{u+iu^*} is an H_∞ function whose values on C have absolute value 1 a. e. on S and $1-c/2$ a. e. on $C-S$, with respect to Lebesgue measure. Let $f = e^{u+iu^*}|C$. Let g be the function on C which is equal to f on S and to 0 on $C-S$, while h is equal to 0 on S and to f on $C-S$. Thus $\varphi(f) = \varphi(g) + \varphi(h)$, so

$$\|\varphi(f)\| \leqq \|\varphi(g)\| + \|\varphi(h)\|.$$

Now, $\|\varphi(h)\| \leqq \|h\| = 1-c/2$. We shall show that $\|\varphi(g)\| \leqq c$, which will show that $\|\varphi(f)\| < 1$, giving the desired contradiction.

For each Borel subset R of C, set

$$G(R) = c^{-1}F(R \cap S) + m(R-S)m(C-S)^{-1}(I - c^{-1}F(C-S)).$$

Then G is an operator measure on Borel sets of the unit circle, and is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. Let ψ be the map from $L_\infty(G)$ to operators obtained from G, i. e. $(\psi(k)x, y) = \int k(t)d(G(t)x, y)$. Then ψ is norm-nonincreasing. Applying this to the function g above, we get

$$|(\psi(g)x, y)| = \left|\int g(t)d(G(t)x, y)\right| = \left|c^{-1}\int g(t)d(F(t)x, y)\right|.$$

But $\|\psi(g)\| \leqq 1$, so $|(\varphi(g)x, y)| \leqq c\|x\| \|y\|$, and therefore $\|\varphi(g)\| \leqq c$.

3. Some remarks and a question

We have seen via the corollary to Theorem 1 that if the map φ arising from an operator measure F is norm-preserving, then $\alpha(\varphi(f)) \cap C(\|f\|)$ equals $\sigma(\|f\|) \cap \cap C(\|f\|)$. The opposite direction is obvious, of course. However, there are situations in which assumptions on the spectrum of $\varphi(f)$ for only a *single* function f lead to φ being an isometry.

Consider the case where F is an operator measure on the Borel sets of C. Let $A = \int t dF(t)$.

(1) M. Schreiber has shown in [7], and it also follows without difficulty from our Theorem 1, that if $\alpha(A)$ contains the support of F, then $\|\varphi(f)\| = \|f\|$ whenever f has a *continuous* representative.

(2) In the same paper, Schreiber, shows that if F is a strong operator measure, F being absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, and $\alpha(A)$ contains some neighborhood of C in D, then φ is isometric on H_∞, and so by our Theorem 2 on all of L_∞ (where L_∞ refers to Lebesgue measure). Schreiber's theorem actually assumes that $\alpha(A) = D$, but his proof can be seen to give the stronger form we have stated.

So one question which naturally arises is this: let F be a strong operator measure on C. Does the condition $\alpha(A) \supset C$ suffice to make φ isometric on $L_\infty(F)$?

References

[1] N. I. Achieser and I. M. Glasman, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum* (Berlin, 1954).
[2] M. A. Naĭmark, Über eine Darstellung additiver Operator-funktionen von Mengen, *Doklady Akad. Nauk. SSSR*, **41** (1943), 373—375.
[3] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.
[4] B. Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, appendice au livre „Leçons d'analyse fonctionnelle", par F. Riesz and B. Sz.-Nagy (Budapest, 1955).
[5] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—45.
[6] M. Schreiber, Unitary dilations of operators, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 579—594.
[7] M. Schreiber, Absolutely continuous operators, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 175—190.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
BERKELEY, CALIFORNIA

(Received September 14, 1961)

Remark to the preceding paper of J. Feldman*

By B. SZ.-NAGY in Szeged and C. FOIAŞ in Bucharest

At the end of his paper, J. FELDMAN raises a question. We show that the answer to this is in the negative, i. e. we exhibit *a strong operator measure* $F(\sigma)$ *in Hilbert space* H, *such that the spectrum of* $A=\int_0^{2\pi} e^{it}F(dt)$ *covers the unit circle* C *in the complex plane, nevertheless the map*

$$f \to \int_0^{2\pi} f(t)\,F(dt) \tag{1}$$

from $L^\infty(F)$ *into* $B(H)$ *is not isometric.*

Let M be an open set in $(0,2\pi)$ such that (i) $m(M)=\pi$, (ii) $m(M\cap\Delta)>0$ for any interval $\Delta\subset(0,2\pi)$, m denoting Lebesgue measure. Such an M may be constructed e. g. by taking first the open interval of length $2\pi/3$ from the middle of $(0,2\pi)$, the two open intervals each of length $2\pi/(2\cdot 3^2)$ from the middle of the two remaining parts of $(0,2\pi)$, then the four open intervals each of length $2\pi/(2^2\cdot 3^3)$ from the middle of the four remaining parts of $(0,2\pi)$, and so on.

Now consider the Hilbert space $H=L^2(M)\oplus X$ where X is one-dimensional. For any Borel subset σ of $[0,2\pi)$ define

$$F(\sigma)\big(u(\theta)\oplus\xi\big) = \chi(\sigma;\,\theta)u(\theta)\oplus\frac{m(\sigma)}{2\pi}\,\xi,$$

where $\chi(\sigma;\theta)$ denotes the characteristic function of σ. F is evidently an operator measure on H; it is a strong one since

$$\int_0^{2\pi} e^{int}F(dt)\big(u(\theta)\oplus\xi\big) = \int_0^{2\pi} e^{int}\chi(dt;\,\theta)u(\theta)\oplus\int_0^{2\pi} e^{int}\,\frac{dt}{2\pi}\,\xi = e^{in\theta}u(\theta)\oplus 0$$

$(n=1,2,\dots)$, thus if

$$A=\int_0^{2\pi} e^{it}F(dt) \text{ then } A^n=\int_0^{2\pi} e^{int}F(dt) \qquad (n=1,2,\dots).$$

* J. FELDMAN, On the functional calculus of an operator measure, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 268–271.

The spectrum of A contains the spectrum of the part of A in $L^2(M)$, i. e. the spectrum of the unitary operator $Uu(\theta)=e^{i\theta}u(\theta)$ on $L^2(M)$. The spectral measure E of U is given by

$$E(\sigma)u(\theta) = \chi(\sigma;\theta)u(\theta),$$

thus, for any interval Δ in $[0,2\pi)$,

$$\|E(\Delta)1\|^2 = \int_{M\cap\Delta} d\theta = m(M\cap\Delta)>0$$

by (ii). It follows that no interval Δ is of E-measure 0, thus the spectrum of A covers C.

Nevertheless the map (1) is no $L^\infty(F)\to B(H)$ isometry. For if $M' = [0,2\pi)-M$ then

$$F(M')\big(u(\theta)\oplus\xi\big) = \chi(M';\theta)u(\theta)\oplus\frac{1}{2}\xi = 0\oplus\frac{1}{2}\xi,$$

thus $\|F(M')\| = \frac{1}{2}$. Taking $f(\cdot) = \chi(M';\cdot)$ we get

$$\left\|\int_0^{2\pi} f(t)F(dt)\right\| = \|F(M')\| = \frac{1}{2}$$

whereas

$$\|f\|_{L^\infty(F)} = 1$$

since the set on which f assumes the value 1, i. e. the set M', has not F-measure 0 (indeed, $\|F(M')\| = \frac{1}{2}$).

(Received October 24, 1961)

Une caractérisation nouvelle des algèbres de von Neumann finies

Par C. FOIAŞ à Bucarest et I. KOVÁCS à Szeged

1. Soient $\mathfrak{H}$ un espace hilbertien complexe, $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathfrak{H}$. Un élément T de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ est dit *complètement non-unitaire* si pour tout élément $x \neq 0$ de $\mathfrak{H}$ les quantités

$$\|Tx\|, \|T^2x\|, \ldots, \|T^nx\|, \ldots; \ \|T^*x\|, \|T^{*2}x\|, \ldots, \|T^{*n}x\|, \ldots$$

ne sont pas toutes égales à $\|x\|$ (cf. [2]). Dans la présente Note, nous caractérisons les algèbres de von Neumann finies de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ (cf. [1], chap. I, § 6, déf. 5)[1]) par leurs contractions[2]) complètement non-unitaires de la façon suivante:

Théorème 1. *Pour qu'une algèbre de von Neumann $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ soit finie, il faut et il suffit que, pour toute contraction complètement non-unitaire T de $\mathscr{A}$, la suite $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ tende fortement vers zéro.*

La démonstration de ce théorème sera basée sur le

Théorème 2. *Soient $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ une algèbre de von Neumann finie, T une contraction de $\mathscr{A}$, $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ la décomposition canonique de T en sa partie unitaire $T^{(u)}$ et sa partie complètement non-unitaire $T^{(0)}$*[3]), *et $E^{(u)}$, $E^{(0)}$ les projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{H}$ sur les sous-espaces correspondants $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$. On a alors $E^{(u)} \in \mathscr{A}$, $E^{(0)} \in \mathscr{A}$ et*

$$(*) \qquad \mathfrak{H}^{(0)} = \{x \in \mathfrak{H} : T^n x \to 0 \ (n \to \infty)\}.$$

Démonstration. T étant une contraction, les suites $\{T^{*n}T^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{T^nT^{*n}\}_{n=1}^{\infty}$ sont évidemment fortement convergentes. Prouvons que

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n = \lim_{n\to\infty} T^nT^{*n}.$$

Posons $\lim_{n\to\infty} T^{*n}T^n = R$, $\lim_{n\to\infty} T^nT^{*n} = S$. Evidemment $R, S \in \mathscr{A}$, et $T^{*k}RT^k = R$,

[1]) Pour la théorie des algèbres de von Neumann, nous renvoyons le lecteur à [1].

[2]) Par contraction nous entendons un élément T de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ pour lequel $\|T\| \leqq 1$.

[3]) On sait (cf. [2], th. 1) qu'à toute contraction T de $\mathfrak{H}$ correspond une décomposition de $\mathfrak{H}$ en somme orthogonale de deux sous-espaces orthogonaux complémentaires $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$ réduisant T et tels que la partie de T dans $\mathfrak{H}^{(u)}$ est un opérateur unitaire $T^{(u)}$ et sa partie dans $\mathfrak{H}^{(0)}$ est une contraction complètement non-unitaire $T^{(0)}$. Cette décomposition est unique, et la décomposition $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ est appelée la *décomposition canonique* de T.

$T^k S T^{*k} = S$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Pour toute trace normale finie φ sur $\mathscr{A}$ (cf. [1], chap. I, §6, no. 1) on a

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} \varphi\big((T^{*n}T^n - S)^*(T^{*n}T^n - S)\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\varphi(T^{*n}T^nT^{*n}T^n) - \varphi(T^{*n}T^nS) - \varphi(ST^{*n}T^n) + \varphi(S^2)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\varphi(T^nT^{*n}T^nT^{*n}) - \varphi(T^nST^{*n}) - \varphi(T^nST^{*n}) + \varphi(S^2)] =$$
$$= 2\varphi(S^2) - 2\varphi(S) \leqq 2\varphi(S) - 2\varphi(S) = 0,$$

puisque $0 \leqq S^2 \leqq S$. Donc on a

$$\varphi(S - S^2) = \varphi(S) - \varphi(S^2) = 0, \tag{2}$$

et

$$\lim \varphi\big((T^{*n}T^n - S)^*(T^{*n}T^n - S)\big) = 0. \tag{3}$$

Il résulte de (3) (cf. [1], chap. I, §4, prop. 9) que la suite $\{E_\varphi(T^{*n}T^n - S)\}_{n=1}^\infty$, où E_φ désigne le support de φ (cf. [1], chap. I, § 6, no. 1), tend fortement vers zéro. Ainsi,

$$E_\varphi S = \lim_{n\to\infty} E_\varphi T^{*n}T^n = E_\varphi R. \tag{4}$$

Soit maintenant $(\varphi_\iota)_{\iota\in I}$ une famille maximale de traces normales finies non-nulles sur $\mathscr{A}$, dont les supports E_ι, qui sont des projecteurs non-nuls du centre de $\mathscr{A}$, soient deux à deux orthogonaux. Puisque $\mathscr{A}$ est finie, on peut voir aisément que $\sum_{\iota\in I} E_\iota = I$ (I désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{H}$). D'après (4), on a alors

$$S = \sum_{\iota\in I} SE_\iota = \sum_{\iota\in I} RE_\iota = R,$$

d' où (1).

Comme $\mathscr{A}$ est finie, et $S - S^2 \geqq 0$ il résulte de (2) que $S = S^2$, c'est-à-dire que la limite commune S des suites $\{T^{*n}T^n\}_{n=1}^\infty$ et $\{T^nT^{*n}\}_{n=1}^\infty$ est un projecteur de $\mathfrak{H}$.

Remarquons que de la définition de S il résulte aussitôt

$$(I - S)\mathfrak{H} = \{x \in \mathfrak{H} : T^n x \to 0 (n \to \infty)\} = \{x \in \mathfrak{H} : T^{*n} x \to 0 (n \to \infty)\}, \tag{5}$$

par conséquent le sous-espace $(I - S)\mathfrak{H}$ est invariant par T et T^*. On en déduit que

$$TS = ST. \tag{6}$$

Soit maintenant φ une trace normale finie quelconque sur $\mathscr{A}$. On a alors

$$\varphi(S(I - T^*T)S) = \varphi(S^2) - \varphi(ST^*TS) = \varphi(S) - \varphi(TST^*) = \varphi(S) - \varphi(S) = 0,$$
$$\varphi(S(I - TT^*)S) = \varphi(S^2) - \varphi(STT^*S) = \varphi(S) - \varphi(T^*ST) = \varphi(S) - \varphi(S) = 0.$$

Comme $S(I - T^*T)S \geqq 0$, $S(I - TT^*)S \geqq 0$, et $\mathscr{A}$ est finie, on a

$$S(I - T^*T)S = S(I - TT^*)S = 0,$$

donc, en tenant compte de (6),

(7) $$(TS)^*TS = TS(TS)^* = S.$$

Posons $\mathfrak{H}_0 = (I-S)\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1 = S\mathfrak{H}$, et désignons par T_0 (resp. T_1) la restriction de T à $\mathfrak{H}_0$ (resp. $\mathfrak{H}_1$). D'après (5), T_0 est complètement non-unitaire, et d'après (7), T_1 est unitaire. Comme $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$, $T = T_0 \oplus T_1$, et $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1$ réduisent T (cf. (6)), il résulte de l'unicité de la décomposition canonique de T que $\mathfrak{H}^{(u)} = \mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{H}_0$, $T^{(u)} = T_1$ et $T^{(0)} = T_0$. Ainsi, $E^{(0)} = I - S = \in \mathscr{A}$, $E^{(u)} = S \in \mathscr{A}$, ce qui achève, en tenant compte de (5), la démonstration du théorème 2.

Nous pouvons maintenant passer à la

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Supposons $\mathscr{A}$ finie, et soit T une contraction complètement non-unitaire quelconque de $\mathscr{A}$. Comme, dans ce cas, la partie unitaire de T est zéro, l'assertion (✻) du théorème 2 montre que T^n tend fortement vers zéro pour $n \to \infty$.

Réciproquement, supposons que la condition du théorème 1 soit remplie et montrons que $\mathscr{A}$ est finie.

Or, soit T un élément de $\mathscr{A}$ tel que $T^*T = I$ (I désigne l'opérateur identique de $\mathfrak{H}$). T est alors un opérateur isométrique, donc il est une contraction. Soit $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ la décomposition canonique de T en sa partie unitaire $T^{(u)}$ et sa partie complètement non-unitaire $T^{(0)}$ opérant dans les sous-espaces $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$ de $\mathfrak{H}$ selon le cas. Soit $E^{(0)}$ le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}^{(0)}$. T étant isométrique, on peut voir aisément que

(8) $$E^{(0)}\mathfrak{H} = \{x \in \mathfrak{H} \colon T^{*n}x \to 0 \text{ pour } n \to \infty\}.$$

Soit T' un élément quelconque du commutant $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$. D'après (8), pour tout $x \in \mathfrak{H}$, on a

$$T^{*n}T'E^{(0)}x = T'T^{*n}E^{(0)}x \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

On en déduit que $E^{(0)}T'E^{(0)} = T'E^{(0)}$ pour tout $T' \in \mathscr{A}'$. Comme $\mathscr{A}'$ est stable par l'adjonction, il en résulte que

$$E^{(0)}T' = T'E^{(0)},$$

c'est-à-dire que $E^{(0)} \in \mathscr{A}'' = \mathscr{A}$. Par suite $T_0 = TE^{(0)} \in \mathscr{A}$ et T_0 est complètement non-unitaire. Ainsi, d'après la condition du théorème 1, $T_0^n \to O$ fortement pour $n \to \infty$. Mais, pour tout $x \in E^{(0)}\mathfrak{H}$, on a $\|T_0^n x\| = \|x\|$, d'où $E^{(0)}\mathfrak{H} = (0)$. Ainsi T est unitaire, donc on a aussi $TT^* = I$, ce qui entraîne que $\mathscr{A}$ est finie (cf. [1], chap. III, §8, th. 1). Ainsi la démonstration du théorème 1 est achevée.

R e m a r q u e. Dans le cas d'un espace hilbertien de dimension finie, il est évident que pour toute contraction complètement non-unitaire T, on a $T^n \to O$ fortement (de plus en norme) $(n \to \infty)$[4]. Théorème 1 généralise cette assertion au cas des algèbres de von Neumann finies. En général, cette assertion n'est pas valable pour des algèbres de von Neumann semi-finies (cf. [1], chap. I, §6, déf. 5). Voici un exemple. Soit $\mathfrak{H} = l^2$, et soit $T(c_n)_{n=0}^{\infty} = (0, c_0, c_1, \ldots)$. On voit aisément que T est une contrac-

---

[4]) Dans ce cas, en effet, le spectre de T est contenu dans un disque $\{z \colon |z| \leqq 1 - \varepsilon\}$ avec $\varepsilon > 0$.

tion complètement non-unitaire de l'algèbre de von Neumann semi-finie $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$, et T^n ne tend pas fortement vers zéro puisque T^n est un opérateur isométrique pour tout $n \geqq 0$.

2. Indiquons maintenant deux conséquences simples du théorème 2.

a) En appelant un élément $S \in \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ *partiellement unitaire* si $S^*S = SS^* = E$, E étant un projecteur orthogonal de $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$, on peut formuler la

Proposition 1. *Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ une algèbre de von Neumann finie. Toute contraction $T \in \mathscr{A}$ peut être uniquement représentée en somme de deux éléments $T_{(u)}$ et $T_{(0)}$ de $\mathscr{A}$, permutables à T et tels que*

(i) $T_{(u)}$ *soit partiellement unitaire,* $T_{(0)}$ *soit complètement non-unitaire;*

(ii) $T_{(u)}T_{(0)} = T_{(0)}T_{(u)} = O$;

(iii) $T_{(0)}^n \to O$ fortement pour $n \to \infty$.

Démonstration. Soit $T = T^{(u)} \oplus T^{(0)}$ la décomposition canonique de T, et soient $E^{(u)}, E^{(0)}$ les projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{H}$ sur les sous-espaces correspondants $\mathfrak{H}^{(u)}$ et $\mathfrak{H}^{(0)}$. En vertu du théorème 2, on a $E^{(u)}, E^{(0)} \in \mathscr{A}$. En posant $T_{(u)} = T^{(u)} \circ E^{(u)} = TE^{(u)}$, $T_{(0)} = T^{(0)} \circ E^{(0)} = TE^{(0)}$, on a $T_{(u)}, T_{(0)} \in \mathscr{A}$; $T_{(u)}$ est partiellement unitaire, $T_{(0)}$ est complètement non-unitaire, et $T_{(u)}T_{(0)} = T_{(0)}T_{(u)} = O$, d'où (i) et (ii). Finalement, (iii) résulte du théorème 1.

b) Soit T une contraction d'une algèbre de von Neumann finie dans $\mathfrak{H}$. Il résulte aussitôt du théorème 2 que

$$\mathfrak{H}^{(0)} = \{x \in \mathfrak{H} \colon T^n x \to 0 (n \to \infty)\} = \{x \in \mathfrak{H} \colon T^{*n} x \to 0 \ (n \to \infty)\}.$$

Ce fait nous permet de donner une réponse partielle au problème suivant. Soient $T_i \in \mathscr{B}(\mathfrak{H}_i)$ $(i = 1, 2)$ deux contractions, $T_i = T_i^{(u)} \oplus T_i^{(0)}$ $(\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_i^{(u)} \oplus \mathfrak{H}_i^{(0)})$ la décomposition canonique de T_i, $E_i^{(0)}$ le projecteur orthogonal de $\mathfrak{H}_i$ sur $\mathfrak{H}_i^{(0)}$. La relation $T_1 X = XT_2$, où X est un opérateur linéaire borné de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$, entraîne-t-elle $E_1^{(0)}X = XE_2^{(0)}$? La réponse est, en général, négative[5]). Toutefois on a la

Proposition 2. *Soit la contraction T_1 (resp. T_2) contenue dans une algèbre de von Neumann finie $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H}_1)$ [resp. $\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{B}(\mathfrak{H}_2)$]. Si X est un opérateur linéaire borné de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{H}_1$ tel que $T_1X = XT_2$, on a aussi $E_1^{(0)}X = XE_2^{(0)}$.*

---

[5]) En voici un exemple Soient: $\mathfrak{H} = \left\{(c_n)_{-\infty}^{\infty} \colon \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty\right\}$, $|t| < 1$, et

$$T(\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots) =$$
$$= (\ldots, tc_{-n+1}, tc_{-n+2}, \ldots, tc_{-2}, tc_{-1}, tc_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots),$$
$$U(\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots) =$$
$$= (\ldots, c_{-n+1}, c_{-n+2}, \ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots),$$
$$X(\ldots, c_{-n}, c_{-n+1}, \ldots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots) =$$
$$= (\ldots, t^n c_{-n}, t^{n-1} c_{-n+1}, \ldots, t^2 c_{-2}, tc_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n, \ldots).$$

Alors U est unitaire, $\|T\| \leqq 1$, $T^n \to O$ fortement (donc T est complètement non-unitaire), X est inversible, et $TX = XU$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après les hypothèses sur T_i $(i=1, 2)$, on déduit d'abord que si $T_2^n x_2 \to 0$, alors $T_1^n X x_2 \to 0$, donc que $E_1^{(0)} X E_2^{(0)} = X E_2^{(0)}$, puis que si $T_1^{*n} x_1 \to 0$, alors $T_2^{*n} X^* x_1 \to 0$, donc $E_2^{(0)} X^* E_1^{(0)} = X^* E_1^{(0)}$, d'où

$$XE_2^{(0)} = E_1^{(0)} XE_2^{(0)} = (E_2^{(0)} X^* E_1^{(0)})^* = (X^* E_1^{(0)})^* = E_1^{(0)} X.$$

Bibliographie

[1] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (Paris, 1957).
[2] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251—259.

(Reçu le 15 janvier 1962)

Sz.-Nagy—Brehmer dilations

By ISRAEL HALPERIN in Kingston (Canada)

1. Introduction

1. 1. The following discussion (sections 1. 1 and 1. 2) is due to B. SZ.-NAGY [2, 3, 4].[1])

Let J denote a totally ordered set of indices α and let $\tilde{J}$ denote the set of all integer valued functions $n \equiv n(\alpha)$, $-\infty < n(\alpha) < \infty$, such that $\tilde{n} \equiv$ set of α with $n(\alpha) \neq 0$, is a finite subset of J.

Write $n=0$ if $n(\alpha)=0$, $n \leqq m$ if $n(\alpha) \leqq m(\alpha)$, for all α. For given $n, m \in \tilde{J}$ define $n-m$, n^+ by: $(n-m)(\alpha) = n(\alpha)-m(\alpha)$, $n^+(\alpha) = \max(n(\alpha), 0)$ for all α. Call n, m *positive-disjoint* if $(n-m)^+ = n$ and $(m-n)^+ = m$ (then necessarily $n \geqq 0$ and $m \geqq 0$).

Suppose H is a given Hilbert space. If T is an operator[2]) on H and i is an integer, define $T(i)$ to be T^i if $i \geqq 0$ and $(T^*)^{-i}$ if $i<0$. If T_α $(\alpha \in J)$ are given operators on H define $T(n)$ as follows: if the indices in $\tilde{n}$, ordered as in J, are denoted as $1, \ldots, r$, let $T(n) = T_1(n(1))\, T_2(n(2)) \ldots T_r(n(r))$, with the convention: $T(0)$ shall mean 1.

Call a family of unitary operators U_α $(\alpha \in J)$ acting on some Hilbert space $K \supset H$ a *unitary dilation of the* T_α $(\alpha \in J)$ if the U_α $(\alpha \in J)$ are commuting and

(1. 1) $\qquad T(n)x = P_H U(n)x$ *for all* $x \in H$ *and all* $n \geqq 0$,[3])

and *minimal* if also

(1. 2) $\qquad K$ *is spanned by the* $U(n)x$ (*all* $x \in H$, *all* $n \in \tilde{J}$).[4])

Note: the U_α are required to be commuting but not the T_α.

1. 2. Suppose T_α $(\alpha \in J)$ has a unitary dilation U_α $(\alpha \in J)$. Then clearly the T_α must be contractions[5]). Consider the scalar valued function $B \equiv B(n, x; m, y)$ *defined*

---

[1]) The writer acknowledges with pleasure several stimulating conversations with Prof. SZ.-NAGY.

[2]) The scalars may be the real, complex or quaternionic numbers. Inner product will be denoted $(x|y)$. In this paper all operators are bounded, linear. Operators T_α $(\alpha \in J)$ are called commuting if $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ for all $\alpha, \beta \in J$.

[3]) P_H will denote the projection (orthogonal) of K onto H.

[4]) If (1. 1) is satisfied by some K, U_α $(\alpha \in J)$ then (1. 1), (1. 2) will be satisfied by K_0 (the subspace of K spanned by the vectors named in (1. 2)) and the restrictions of the U_α $(\alpha \in J)$ to this K_0.

[5]) A contraction T is a linear operator with $\|T\| \leqq 1$.

for $x, y \in H$ and positive-disjoint n, m by

(1. 3) $$B \equiv (U(n)x \mid U(m)y).$$

As pointed out by SZ.-NAGY, B has the properties:

(1. 4) $$B(n, x; 0, y) = (T(n)x \mid y).$$

(1. 5) *$B(n, x; m, y)$ is linear in y and* $B(n, x; m, y) = \overline{B(m, y; n, x)}$.

(1. 6) *(The positivity condition:)*

$$\sum_{i,j=1}^{N}{}' B((n_i - n_j)^+, x_i; (n_j - n_i)^+, x_j) \geqq 0$$

for all $x_1, \ldots, x_N \in H, \quad n_1, \ldots, n_N \geqq 0, \quad N = 1, 2, \ldots.$[6])

On the other hand, if T_α $(\alpha \in J)$ are given contractions then, as pointed out by SZ.-NAGY every scalar valued B with properties (1. 4)–(1. 6) determines uniquely a minimal unitary dilation (unique to within a unitary isomorphism). The T_α need not be commuting.

We sketch the proof. Let K' denote the linear space of *formal* finite sums $\sum_i (n_i, x_i)$ with all n_i in $\hat{J}$ and x_i in H[7]) (where, if $v = \sum_i (n_i, x_i)$ and $w = \sum_j (m_j, y_j)$ then $vc = \sum_i (n_i, x_i c)$ for scalar c, and $v \pm w$ have the obvious values). Define $(v \| w)$ as

$$\sum_{i,j} B((n_i - m_j)^+, x_i; (m_j - n_i)^+, y_j).$$

Then $(v \| v) \geqq 0$ for all v in K' (because of (1. 6)). Identify v and w (in K') if

$$((v - w) \| (v - w)) = 0.$$

After such identifications K' becomes a Hilbert space (possibly incomplete) with inner product $(v \mid w) = (v \| w)$. Now identify x in H with $(0, x)$ and so imbed H in K'. For each β, determine a linear operator U_β on K' by the relation: $U_\beta(n, x) = (m, x)$ where $m(\beta) = n(\beta) + 1$ and $m(\alpha) = n(\alpha)$ if $\alpha \neq \beta$. Then the U_α are unitary on K' and their extension to K, the completion of K', is the desired minimal unitary dilation.[8])

1. 3. Thus for given contractions T_α $(\alpha \in J)$ there are precisely as many solutions K, U_α $(\alpha \in J)$ of (1. 1), (1. 2) as there are functions B which satisfy (1. 4), (1. 5), and (1. 6).

1. 4. If J has exactly one element (the case of a single contraction) then the values of B are completely determined by (1. 4) and (1. 5). So in this case there is a solution (unique) if and only if the positivity condition holds for these values of B. SZ.-NAGY proved that positivity does hold in this case, solving the problem completely for a single contraction.

---

[6]) The left side of (1. 6) is equal to $\sum_{i=1}^{N} \|U(n_i)x_i\|^2$.

[7]) After the U_α have been constructed, (n, x) will turn out to be the value of $U(n)x$.

[8]) This discussion is valid whether the scalars are the real, complex or quaternionic numbers.

1. 5. If J has more than one element it is not yet known whether solutions of (1. 1), (1. 2) always exist, even for the case of commuting T_α. However, Sz.-Nagy extended his methods to the case of doubly commuting T_α (that is: $T_\alpha T_\beta^* = T_\beta^* T_\alpha$ as well as $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ for $\alpha \neq \beta$). In order to describe Sz.-Nagy's result more precisely, let us call U_α $(\alpha \in J)$ a *Sz.-Nagy—Brehmer* (abbreviation: *Sz.-N.—B.*) *dilation of* T_α $(\alpha \in J)$ if (stronger than (1. 1)):

$$(1.7) \qquad \begin{cases} (T(m))^* T(n)x = P_H(U(m))^* U(n)x \\ \textit{for all } x \in H \textit{ and all positive-disjoint } n, m. \end{cases}$$

Clearly if the U_α $(\alpha \in J)$ are a Sz.-N.—B. dilation then the function B is completely determined by the T_α $(\alpha \in J)$.

Now for given T_α $(\alpha \in J)$ (without assumption as to existence of a unitary dilation) let us call $(T(n)x \mid T(m)y)$ the *Sz.-Nagy—Brehmer* (abbreviation: Sz.-N.—B.) *values* for $B(n, x; my)$. Then, if T_α $(\alpha \in J)$ does possess a Sz.-N.—B. minimal dilation, this dilation is obviously determined (uniquely) by the Sz.-N.—B. values. On the other hand, the Sz.-N.—B. values always satisfy (1. 4) and (1. 5); so if they determine a unitary dilation at all (that is, if the positivity condition (1. 6) holds) then this dilation is necessarily a Sz.-N.—B. dilation.

Sz.-Nagy proved: with the Sz.-N.—B. values, positivity does hold *if the* T_α $(\alpha \in J)$ *are doubly commuting:* thus for this case he obtained a particular solution of (1. 1), (1. 2), in fact a Sz.-N.—B. dilation. We note: if U_α $(\alpha \in J)$ is a Sz.-N.—B. dilation then the *stronger* condition

$$(1.7)' \qquad \begin{cases} (T(n_1))^* T(n_2)(T(n_3))^* \ldots T(n_s)x = P_H(U(n_1))^* U(n_2)(U(n_3))^* \ldots U(n_s)x \\ \textit{for all } x \in H \textit{ and pairwise positive-disjoint } n_1, \ldots, n_s \end{cases}$$

holds if and only if the T_α $(\alpha \in J)$ are doubly commuting.

1. 6. Recently Brehmer [1] has refined Sz.-Nagy's method and has shown that the Sz.-N.—B. values satisfy the positivity condition (and hence yield a solution for (1. 7), (1. 2) but not for (1. 7)′ in general), assuming commutativity of the T_α $(\alpha \in J)$ together with a condition weaker than that of double commutativity. Sz.-Nagy and Brehmer use a set of indices $J = \{\alpha\}$ not assumed to be ordered; but in fact, when the T_α are commuting it is equivalent to consider J as totally ordered in any way.

1. 7. In the present paper we give a new and simple proof of positivity for Sz.-N.—B. values. More precisely, we show:

If the T_α $(\alpha \in J)$ *are commuting operators then positivity holds for the Sz.-Nagy—Brehmer values if and only if the following condition holds: For every finite subset of J, denoted* $1, \ldots, r$ *for convenience, the operator*

$$(1.8) \qquad \begin{cases} P(T_1, \ldots, T_r) \equiv \sum\limits_u (-1)^{a(u)} (T(u))^* T(u) \textit{ shall be positive definite,} \\ \textit{where } u = (u_1, \ldots, u_r) \textit{ (varies over all } 0 \leqq u_s \leqq 1,\ s = 1, \ldots, r), \textit{ and } a(u) = \\ = \sum\limits_{s=1}^{r} u_s.^{9)} \end{cases}$$

[9]) If $r = 1$, (1. 8) becomes $P(T) \geqq 0$, that is $1 - T^*T \geqq 0$, which is equivalent to the assertion: T is a contraction.

Our proof (see section 2, 3 below) depends on some simple matrix calculations and is advantageous even for the case of a single contraction (where the condition (1. 8) is satisfied trivially). Like SZ.-NAGY and BREHMER, we do not use spectral theory or square roots of positive definite operators. But to show that (1. 8) is satisfied by doubly commuting contractions seems to require (as in the proof of SZ.-NAGY, BREHMER) the fact that the product of two commuting positive definite operators is positive definite. An elementary proof of this fact was given by F. RIESZ [6].

1. 8. If J contains only two elements, BREHMER's condition coincides with our (1. 8); if J contains more than two elements, BREHMER's condition, (10) of his paper [1], is our (1. 8) but for $kT_1, \ldots, kT_r$ in place of $T_1, \ldots, T_r$ for all $0<k<1$ (and hence, by continuity also for $k=1$, which is precisely our (1. 8)). It is not clear whether BREHMER's (apparently) stronger condition is actually necessary when J contains more than two elements.

The proof of BREHMER (like that of SZ.-NAGY) employs Fourier series and seems to be valid only for complex (or real) scalars. Our proof is valid for quaternionic scalars also.

1. 9. In section 4 we discuss possible properties of a particular T_β (to be isometric or to double commute with the other T_α $(\alpha \neq \beta)$) which permit omitting this T_β from the condition (1. 8). In section 5 we give some illustrative examples including cases of T_α $(\alpha \in J)$ which are *not* commuting but do possess a Sz.-N.—B. dilation (the order of J is essential in these cases.)

2. Proof of positivity for a single contraction T

2. 1. With the notation of section 1. 2 we need only verify (1. 6). It is easy to see that for a single contraction, a statement equivalent to (1. 6) is this: For each integer $N \geqq 1$, and arbitrary $x_0, \ldots, x_N$ in H

$$\sum_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{N} (T^{i-j}x_i|x_j) + \sum_{\substack{i,j=0 \\ j\geqq i}}^{N} (x_i|T^{j-i}x_j) \geqq 0. \tag{2. 1}$$

2. 2. Let $\bar{H}$ be the direct sum of $N+1$ copies of H, so that the vectors in $\bar{H}$ can be identified with the systems $(x_0, \ldots, x_N)$ (with all x_i in H). Then (2. 1) clearly asserts that a certain bounded linear operator $\bar{T}$ on $\bar{H}$ is positive definite, namely the $\bar{T}$ whose matrix[10]) has (i,j)-th entry

$$\bar{T}_{i,j} = T^{j-i} \quad \text{if} \quad j \geqq i, \qquad = (T^*)^{i-j} \quad \text{if} \quad j<i.$$

2. 3. We shall show that $\bar{T} = W^*DW$ for some W and some positive definite D. This will imply that $\bar{T}$ is positive definite.[11]) For this purpose we choose W, D

[10]) We use the same symbol to denote the operator and the representing matrix of the operator.

[11]) The fact that this matrix $\bar{T}$ is positive definite for arbitrary contraction T seems not to be mentioned in the literature even for the case that H is one-dimensional (then $\bar{T}$ is a numerical matrix and T is simply an arbitrary scalar of absolute value $\leqq 1$).

as follows:

$$\begin{aligned} W_{i,j} &= T^{j-i} && \text{if } j \geqq i, \\ &= 0 && \text{if } j < i; \\ D_{i,j} &= 1 && \text{if } i=j=0, \\ &= 1 - T^*T && \text{if } i=j>0, \\ &= 0 && \text{if } i \neq j. \end{aligned}$$

Since D is a diagonal matrix with $1, 1-T^*T, \ldots, 1-T^*T$ on the diagonal and since $1-T^*T$ is positive definite on H (T is a contraction), therefore D is positive definite on $\bar{H}$.

To confirm that $\bar{T} = W^*DW$ we note that $\bar{T}$ and W^*DW are Hermitian symmetric and so we need only prove that their (i,j)-th entries coincide for $i \leqq j$. Now, for $i \leqq j$,[12])

$$(W^*DW)_{i,j} = \sum_{h=0}^{i} (W^*)_{i,h} D_{h,h} W_{h,j} = (T^*)^i T^j + \sum_{h=1}^{i} (T^*)^{i-h}(1-T^*T)T^{j-h} =$$

$$= (T^*)^i T^j + \sum_{h=1}^{i} \left((T^*)^{i-h} T^{j-h} - (T^*)^{i-h+1} T^{j-h+1}\right) =$$

$$= (T^*)^0 T^{j-i} = T^{j-i} = \bar{T}_{i,j}.$$

Thus $\bar{T} = W^*DW$ as stated and so positivity is established for a single contraction.

3. More than one contraction

3.1. The Sz.-N.—B. values determine the solution (unique if existing) of (1.2) and

$$(U(n)x \mid U(m)y) = (T(n)x \mid T(m)y) \textit{ for positive-disjoint } n, m. \tag{3.1}$$

Condition (3.1) is equivalent to (1.7) and stronger than (1.1).

3.2. As we have seen above, such a (Sz.-N.—B.) solution does exist if and only if positivity holds and this condition can be expressed in the following way.

Let r, N be arbitrary integers $\geqq 1$[13]) and let $1, \ldots, r$ denote any finite subordered subset of J (we do not yet require the T_α to be commuting).

Let i denote an r-tuple: $i = (i_1, \ldots, i_r)$ with $0 \leqq i_s \leqq N$ for each s, and for each such i let x_i be an arbitrary vector in H.

Then the positivity condition (1.6) is equivalent to the statement: For all such $\{x_i\}$:

$$\sum_{i,j} (T_1^{p_1} \ldots T_r^{p_r} x_i \mid T_1^{q_1} \ldots T_r^{q_r} x_j) \geqq 0 \tag{3.2}$$

where $p_s \equiv p_s(i,j) = \max(0, i_s - j_s)$ and $q_s(i,j) = p_s(j,i)$.

---

[12]) Note: $(W^*)_{i,h} = (W_{h,i})^* = 0$ if $h > i$.

[13]) If $r = 1$ the following discussion will specialize to that of section 2.

3. 3. Let $\overline{H} \equiv \overline{H}_r$ be the direct sum of $(N+1)^r$ copies of H so that the elements of $\overline{H}$ can be identified with the systems $\{x_i;\ i \text{ varying}\}$. As in section 2, (3. 2) asserts that a certain operator $\overline{T}$ on $\overline{H}$ is positive definite, namely the $\overline{T}$ whose $(N+1)^r \times \times (N+1)^r$ matrix has (i, j)-th entry:

$$\overline{T}_{i,j} = (T_r^*)^{p_r} \dots (T_1^*)^{p_1} T_1^{q_1} \dots T_r^{q_r}$$

where $p_s = p_s(i, j)$, $q_s = q_s(i, j)$ are as defined in section (3. 2) (note: for each s at least one of p_s, q_s must be 0).

3. 4. We shall show that if the T_α $(\alpha \in J)$ are commuting operators, then (i): $\overline{T} = W^* D W$ holds always (without additional restrictions on the T_α) where D is a certain diagonal operator, and (ii): $\overline{T}$ is positive definite if and only if this D is positive definite.

For this purpose we define W, D by:

$$\begin{aligned} W_{i,j} &= T_1^{j_1 - i_1} \dots T_r^{j_r - i_r} \text{ if for each } s = 1, \dots, r,\ i_s \leqq j_s, \\ &= 0 \text{ otherwise;} \\ D_{i,j} &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{if } i \neq j, \\ &= P(T_{s_1}; \dots, T_{s_t}) \text{ if } i = j \text{ and the } s \text{ with } i_s > 0 \text{ are } s_1, \dots, s_t. \end{aligned}$$

We recall that $P(T_1, \dots, T_r)$ was defined in (1. 8) of section 1. From the definition it follows immediately that if $r > 1$ then

$$P(T_1, \dots, T_r) = P(T_1, \dots, T_{r-1}) - T_r^* P(T_1, \dots, T_{r-1}) T_r.$$

3. 5. We shall show that $\overline{T} = W^* D W$ by induction on r. For $r = 1$ the equality was proved in section 2 above. Suppose now that $r > 1$ and that the equality has been established for $r - 1$ in place of r.

Our present $\overline{H} \equiv \overline{H}_r$ may be considered as the direct sum of $N + 1$ copies of $\overline{H}_{r-1}$, the different copies being associated with the possible values of $i_r = 0, 1, \dots, N$. Each of $\overline{T}$, W^*, D, W can be represented by an $(N+1) \times (N+1)$ matrix with (s, t)-th entry $(s, t = 0, \dots, N)$ an operator on $\overline{H}_{r-1}$.

If we use the indices r, $r - 1$ to refer (in the obvious way) to the situation for $T_1, \dots, T_r, \overline{H}_r$ and $T_1, \dots, T_{r-1}, \overline{H}_{r-1}$ respectively, we have:

$$\begin{aligned} (\overline{T}_r)_{s,t} &= (T_r^*)^{s-t} \overline{T}_{r-1} &&\text{if } s \geqq t, \\ &= \overline{T}_{r-1} T_r^{t-s} &&\text{if } s < t; \\ (W_r)_{s,t} &= W_{r-1} T_r^{t-s} &&\text{if } s \leqq t, \\ &= 0 &&\text{if } s > t; \\ (D_r)_{s,t} &= D_{r-1} &&\text{if } s = t = 0, \\ &= D_{r-1} - T_r^* D_{r-1} T_r &&\text{if } s = t > 0, \\ &= 0 &&\text{if } s \neq t. \end{aligned}$$

Since $\overline{T} \equiv \overline{T}_r$ and $W^*DW \equiv W_r^* D_r W_r$ are clearly Hermitian symmetric (D_r is diagonal with Hermitian symmetric diagonal elements), so we will know that $\overline{T}_r = W_r^* D_r W_r$ if their (s, t)-th entries coincide for $s \leqq t$. Now, for $s \leqq t$,

$$(W_r^* D_r W_r)_{s,t} = \sum_{h=0}^{s} (W_r^*)_{s,h} (D_r)_{h,h} (W_r)_{h,t} = {}^{14)}$$

$$= (W_r^*)_{s,0} D_{r-1} (W_r)_{0,t} + \sum_{h=1}^{s} (W_r^*)_{s,h} (D_{r-1} - T_r^* D_{r-1} T_r)(W_r)_{h,t} =$$

$$= (T_r^*)^s W_{r-1}^* D_{r-1} W_{r-1} T_r^t + \sum_{h=1}^{s} \big((T_r^*)^{s-h} W_{r-1}^* D_{r-1} W_{r-1} T_r^{t-h} -$$

$$- (T_r^*)^{s-h} W_{r-1}^* T_r^* D_{r-1} T_r W_{r-1} T_r^{t-h}\big).$$

Now T_r commutes with W_{r-1} since the entries of W_{r-1} are products of $T_1, \ldots, T_{r-1}$ only.[15] Also $W_{r-1}^* D_{r-1} W_{r-1} = \overline{T}_{r-1}$ by our inductive assumption. Hence

$$(W_r^* D_r W_r)_{s,t} = (T_r^*)^s \overline{T}_{r-1} T_r^t + \sum_{h=1}^{s} \big((T_r^*)^{s-h} \overline{T}_{r-1} T_r^{t-h} - (T_r^*)^{s-h+1} \overline{T}_{r-1} T_r^{t-h+1}\big) =$$

$$= (T_r^*)^0 \overline{T}_{r-1} T_r^{t-s} = (\overline{T}_r)_{s,t}.$$

This completes the proof that $\overline{T} = W^*DW$.

3. 6. Next we show that for $\overline{T}$ to be positive definite it is necessary and sufficient that D be positive definite. Since $\overline{T} = W^*DW$ the "sufficiency" is obvious.

The "necessity" would follow at once if W had a right inverse W^{-1}: $WW^{-1} = 1$. For then, for every x in $\overline{H}$,

$$(Dx|x) = (DWW^{-1}x|WW^{-1}x) = \big(W^*DW(W^{-1}x)|(W^{-1}x)\big) \geqq 0.$$

Now we shall show that W can be considered as a semi-diagonal matrix with 1 at each diagonal place. It is easy to see that every such W has an inverse.

To exhibit W as a semi-diagonal matrix we recall that the entries $W_{i,j}$ are indexed by r-tuples i, j. We totally order these r-tuples by the relation $(i_1, \ldots, i_r) \ll (j_1, \ldots, j_r)$ if $i_1 = j_1, \ldots, i_{s-1} = j_{s-1}, i_s < j_s$ for some $s = 1, \ldots, r$.

With this total ordering of the indices, W is upper semi-diagonal, that is $W_{i,j} = 0$ if $j \ll i$ (in fact, $W_{i,j} = 0$ if $j_s < i_s$ for some s). Also, the diagonal elements of W are $W_{i,i}$, all $= 1$.

This completes the proof that $\overline{T}$ is positive definite if and only if D is positive definite.

3. 7. Since D is diagonal it is positive definite if and only if each of its diagonal entries is positive definite. These entries are all of the form $P(T_1, \ldots, T_s)$ for some

---

[14]) Note: $(W_r^*)_{s,h} = (W_r)_{h,s}^* = 0$ if $h > s$.

[15]) It is at this point in our argument that we need the hypothesis that the $T_\alpha (\alpha \in J)$ are commuting.

$T_1, \ldots, T_s$ and clearly every $P(T_1, \ldots, T_r)$ does occur as a diagonal element in some D. So we have our final result:

Theorem. *For given commuting operators T_α ($\alpha \in J$) in order that the Sz.-Nagy—Brehmer values determine a unitary dilation it is necessary and sufficient that*

$$P(T_1, \ldots, T_r) \geqq 0 \tag{1.8}$$

for all finite subsets $1, \ldots, r$ *of* J.

4. Some comments on the condition (1. 8)

4. 1. Let J_1 be the subset of J remaining after discarding all α for which T_α is isometric, i. e. for which $T_\alpha^* T_\alpha = 1$. Then (1. 8) for J is implied by (1. 8) for J_1.[16]

Indeed, if $r > 1$ and T_1 is isometric then

$$P(T_1, \ldots, T_r) =$$
$$= \sum \pm \left((T_r^*)^{u_r} \ldots (T_2^*)^{u_2} T_1^* T_1 T_2^{u_2} \ldots T_r^{u_r} - (T_r^*)^{u_r} \ldots (T_2^*)^{u_2} T_2^{u_2} \ldots T_r^{u_r} \right) = \sum \pm (0) = 0.$$

More generally, if T_α ($\alpha \in J$) are arbitrary contractions (not required to be commuting) and J is ordered then the existence of a Sz.-N.—B. dilation is not affected by discarding the commuting isometries (the T_α with properties: $T_\alpha^* T_\alpha = 1$ and $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ for all $\beta \in J$). Moreover this fact could have been verified at the *beginning* of our discussion without use of the general condition (1. 8).

To see this consider the condition (3. 2) and suppose that T_1 is a commuting contraction. Then (3. 2) can be expressed:

$$\sum_{\substack{i_2, \ldots, i_r \\ j_2, \ldots, j_r}} \Big(\sum_{i_1 \geqq j_1} (T_2^{p_2} \ldots T_r^{p_r} T_1^{i_1 - j_1} x_{i_1, \ldots, i_r} | T_2^{q_2} \ldots T_r^{q_r} x_{j_1, \ldots, j_r}) +$$
$$+ \sum_{i_1 < j_1} (T_2^{p_2} \ldots T_r^{p_r} x_{i_1, \ldots, i_r} | T_2^{q_2} \ldots T_r^{q_r} T_1^{j_1 - i_1} x_{j_1, \ldots, j_r}) \Big) \geqq 0.$$

Since $T_1^{i_1 - j_1} = (T_1^*)^{j_1} T_1^{i_1}$ if $i_1 > j_1$, this condition can be expressed as

$$\sum_{\substack{i_2, \ldots, i_r \\ j_2, \ldots, j_r}} (T_2^{p_2} \ldots T_r^{p_r} x_{i_2, \ldots, i_r} | T_2^{q_2} \ldots T_r^{q_r} x_{j_2, \ldots, j_r}) \geqq 0$$

where $x_{i_2, \ldots, i_r}$ denotes $\sum_{i_1} T_1^{i_1} x_{i_1, \ldots, i_r}$.

This proves our statement.

4. 2. Let J_2 be the subset of J_1 remaining after discarding from J_1 all α for which T_α double commutes with all other T_β ($\beta \in J_1$, $\beta \neq \alpha$). Then (1. 8) for J is implied by (1. 8) for J_2.

For if T_1 double commutes with $T_2, \ldots, T_r$ then T_1 commutes with $P(T_2, \ldots, T_r)$ and hence

$$\begin{aligned} P(T_1, \ldots, T_r) &= P(T_2, \ldots, T_r) - T_1^* T_1 P(T_2, \ldots, T_r) \\ &= (1 - T_1^* T_1) P(T_2, \ldots, T_r). \end{aligned}$$

[16]) In terms of BREHMER's condition this was pointed out by SZ.-NAGY [5].

Now $1-T_1^*T_1$ is positive definite and commutes with $P(T_2, \ldots, T_r)$. Hence $P(T_1, \ldots, T_r)$ is positive definite if $P(T_2, \ldots, T_r)$ is positive definite; here we use the fact that the product of two commuting positive definite operators is positive definite (see [6]).

More generally, if T_α $(\alpha \in J)$ are arbitrary contractions and J is ordered then the existence of a Sz.-N. — B. dilation is not affected by discarding the doubly commuting members (the T_α with properties: $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ and $T_\alpha T_\beta^* = T_\beta^* T_\alpha$ for all $\beta \neq \alpha$). Moreover this fact could have been verified at the end of section 2 (discussion for a single contraction), without use of the general condition (1. 8).

To see this, consider the condition (3. 2) and suppose that T_1 is doubly commuting. Then (3. 2) can be expressed as follows (use the notation $u = i_1$, $v = j_1$, $s = (i_2, \ldots, i_r)$, $t = (j_2, \ldots, j_r)$, $L_{u,v} = T_1(i_1 - j_1)$, $M_{s,t} = (T_2^{q_2} \ldots T_r^{q_r})^* T_2^{p_2} \ldots T_r^{p_r}$):

$$\sum_{u,s,v,t} (M_{s,t} L_{u,v} x_{u,s} | x_{v,t}) \geqq 0.$$

Let L be the linear operator in $\sum_u \oplus H_u$ (with each H_u a copy of H) such that for all fixed s, t:

$$(L(x_{u,s};\ u \text{ varying}) | (y_{v,t};\ v \text{ varying})) = \sum_{u,v} (L_{u,v} x_{u,s} | y_{v,t}).$$

Similarly let M be the linear operator in $\sum_s \oplus H_s$ (each H_s a copy of H) such that for fixed u, v:

$$(M(x_{u,s};\ s \text{ varying}) | (y_{v,t};\ t \text{ varying})) = \sum_{s,t} (M_{s,t} x_{u,s} | y_{v,t}).$$

Then L, M determine, in the obvious way, commuting Hermitian symmetric operators in $\sum_{u,s} \oplus H_{u,s}$ (with each $H_{u,s}$ a copy of H) and for all x, y in $\sum_{u,s} \oplus H_{u,s}$:

$$(LMx | y) = \sum_{u,v,s,t} (M_{s,t} L_{u,v} x_{u,s} | y_{v,t}).$$

Since L is positive definite (by section 2), it follows that LM is positive definite if M is positive definite. This proves our statement.

4. 3. The condition (1. 8) for J_2 (and hence for J) will hold if

$$\sum_{\alpha \in J_2} \|T_\alpha\|^2 \leqq 1.\ ^{17)}$$

For if $0 \leqq P(T_1, \ldots, T_r) \leqq 1$ then $(P(T_1, \ldots, T_r) y | y) \leqq (y | y)$ for all y; $T_{r+1}^* P(T_1, \ldots, T_r) T_{r+1} \leqq T_{r+1}^* T_{r+1}$; and so

(i) $$P(T_1, \ldots, T_{r+1}) = P(T_1, \ldots, T_r) - T_{r+1}^* P(T_1, \ldots, T_r) T_{r+1} \geqq$$
$$\geqq P(T_1, \ldots, T_r) - T_{r+1}^* T_{r+1}$$

(ii) $$P(T_1, \ldots, T_{r+1}) \leqq P(T_1, \ldots, T_r) \leqq 1.$$

[17]) In terms of BREHMER's condition this was shown by BREHMER [1] (see also SZ.-NAGY [5]).

Now suppose $\sum_i T_i^* T_i \leqq 1$. Then $0 \leqq 1 - T_1^* T_1 = P(T_1) \leqq 1$ and by induction on r:

$$0 \leqq 1 - \sum_{i=1}^{r} T_i^* T_i \leqq P(T_1, \ldots, T_r) \leqq 1$$

for all $r \geqq 1$. Hence $P(T_1, \ldots, T_r) \geqq 0$ for all $T_1, \ldots, T_r$.

5. Some examples

5. 1. If K, U_α $(\alpha \in J)$ is a solution for (1. 1), (1. 2) for T_α $(\alpha \in J)$ then K, U_α^* $(\alpha \in J)$ is a solution for T_α^* $(\alpha \in J^*)$ where J^* is identical with J except that the order is inverted; and if $T_\alpha T_\beta^* = T_\beta^* T_\alpha$ for $\alpha \neq \beta$ then if one of these solutions is a Sz.-N. – B. solution so is the other one.

Since T_α $(\alpha \in J)$ are commuting if and only if T_α^* $(\alpha \in J^*)$ are commuting, it follows that (1. 1), (1. 2) have a particular solution which could be called a *dual Sz.-Nagy – Brehmer dilation if the T_α are commuting and satisfy condition* (1. 8)* (this means: (1. 8) for the T_α^*).

If the T_α $(\alpha \in J)$ are commuting and satisfy both (1. 8) and (1. 8)* we obtain thus two particular solutions of (1. 1), (1. 2) for the T_α and it is easy to see that these will coincide if and only if the T_α are doubly commuting.

Consider the special example: $J = \{1, 2\}$, $T_1 = T_2 = T$, where T is the operator on the two dimensional space spanned by basis φ_1, φ_2 with $T\varphi_1 = k\varphi_2$, $T\varphi_2 = 0$ with $k^2 \leqq \frac{1}{2}$. In this example T_1 and T_2 commute and both (1. 8) and (1. 8)* hold, but $T_1 T_2^* \neq T_2^* T_1$. The Sz.-N. – B. solution for T_2^*, T_1^* yields a dilation for T_1, T_2 which is dual Sz.-N. – B. but *not* Sz.-N. – B. for T_1, T_2.

In the preceding example, if $k^2 > \frac{1}{2}$ then T_1 and T_2 commute but neither (1. 8) nor (1. 8)* are satisfied; in this example (1. 1), (1. 2) do have a solution namely K, U_1, U_2 where K, U is the solution for T (single contraction) and $U_1 = U_2 = U$, but of course this solution is neither a Sz.-N. – B. nor a dual Sz.-N. – B. dilation for T_1, T_2.

5. 2. Suppose U_α $(\alpha \in J$, J totally ordered) is a Sz.-N. – B. minimal dilation for T_α $(\alpha \in J)$. Suppose J_1, J_2 are complementary subsets of J such that $\alpha_1 < \alpha_2$ for all $\alpha_1 \in J_1, \alpha_2 \in J_2$ (we permit J_1 or J_2 to be empty), and let $S_\alpha = T_\alpha^*$, $V_\alpha = U_\alpha^*$ if $\alpha \in J_1$ and let $S_\alpha = T_\alpha$, $V_\alpha = U_\alpha$ if $\alpha \in J_2$.

Let J_{12} coincide with J but with order as follows: if $\alpha \in J_1$ then $\alpha \leqq \alpha_1$ in J shall imply $\alpha_1 \leqq \alpha$ in J_{12} and if $\alpha_2 \in J_2$ then $\alpha \leqq \alpha_2$ in J shall imply $\alpha \leqq \alpha_2$ in J_{12}.

Then V_α $(\alpha \in J_{12})$ will be a Sz.-N. – B. minimal dilation for S_α $(\alpha \in J_{12})$ provided $T_\alpha^* T_\beta = T_\beta T_\alpha^*$ for all $\alpha \in J_1, \beta \in J_1, \alpha \neq \beta$ (if J_1 is empty or consists of one element this condition is vacuous).

Hence if T_α $(\alpha \in J)$ are *commuting* contractions satisfying the condition (1. 8) and if the T_α $(\alpha \in J_1)$ are doubly commuting then the S_α $(\alpha \in J_{12})$ possess a Sz.-N. – B. dilation. However the S_α $(\alpha \in J_{12})$ need not be commuting.

For example, consider two contractions T_1, T_2 such that T_1^*, T_2 commute but T_1, T_2 do not commute. If $1 - T_1 T_1^* - T_2^* T_2 + T_2^* T_1 T_1^* T_2 \geqq 0$ then T_1^*, T_2 possess a Sz.-N. – B. dilation, V_1, V_2 say, and then V_1^*, V_2 will be a Sz.-N. – B. dilation for the original not-commuting T_1, T_2.

In a subsequent paper to appear in *Duke Journal of Mathematics* we shall investigate conditions under which a (wider) class of not-commuting contractions possesses a (mixed Sz.-N. — B.) dilation.

Added in proof: A paper by the writer entitsld: "Intrinsie description of the Sz.- Nagy—Brehmer unitarg dilation", to appear in *Studia Mathematica*, gives a different proof of the Theorem given above (end of section 3), and shows the geometrical significance of the condition (1.8).

References

[1] S. Brehmer, Über vertauschbare Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 106—111.

[2] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953), 87—92.

[3] B. Sz.-Nagy, Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math.* **15** (1954), 104—114.

[4] B. Sz.-Nagy, *Prolongements de transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, Appendix to the book „Leçons d'analyse fonctionnelle", by F. Riesz and B. Sz.-Nagy (3rd edition, Budapest, 1955).

[5] B. Sz.-Nagy, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn S. Brehmer, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 112—114.

[6] F. Riesz, Über die linearen Transformationen des complexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, **5** (1930—32), 23—54 (see footnote 9 there; it is valid if the scalars are real, complex or quaternionic).

(Received July 20, 1961)

Images of induced endomorphisms in Ext (H, G)

By S. G. TELLMAN in Claremont (California, U.S.A.)

We give a homological proof for [1, Theorem 62.4] and point out a dual result. All groups considered are abelian; we use the notation of [1].

Theorem A [1, Theorem 62. 4]. *Let x denote the element of* Ext(H, G) *determined by the exact sequence*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} H \longrightarrow 0;$$

let $\bar{\chi}$ denote the endomorphism of Ext (H, G) *induced by an endomorphism χ of G. Then $x \in \operatorname{Im} \bar{\chi}$ if and only if $\alpha(G)/\alpha(\operatorname{Im} \chi)$ is a direct summand of $E/\alpha(\operatorname{Im} \chi)$.*

Proof. Let χ_1 be the homomorphism of G to $\operatorname{Im} \chi$ induced by χ; let π be the restriction to $\alpha(G)$ of the natural projection of E to $E/\alpha(\operatorname{Im} \chi)$; finally, let i_n be the relevant indentity map for $n=1, 2, 3$.

From the exact sequences

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \chi \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow{\pi\alpha} \alpha(G)/\alpha(\operatorname{Im} \chi) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \chi \xrightarrow{i_2} G \xrightarrow{\chi_1} \operatorname{Im} \chi \longrightarrow 0$$

we get the exact sequences

$$\operatorname{Ext}(H, \operatorname{Im} \chi) \xrightarrow{i_1''} \operatorname{Ext}(H, G) \xrightarrow{(\pi\alpha)''} \operatorname{Ext}[H, \alpha(G)/x(\operatorname{Im} \chi)] \longrightarrow 0,$$

$$\operatorname{Ext}(H, \operatorname{Ker} \chi) \xrightarrow{i_2''} \operatorname{Ext}(H, G) \xrightarrow{\chi_1''} \operatorname{Ext}(H, \operatorname{Im} \chi) \longrightarrow 0.$$

Thus χ_1'' is onto so that $\operatorname{Im} \bar{\chi} = \operatorname{Im}(i_1''\chi_1'') = \operatorname{Im} i_1'' = \operatorname{Ker}(\pi\alpha)''$. Since $(\pi\alpha)''(x)$ is determined by

$$0 \longrightarrow \alpha(G)\alpha(\operatorname{Im} \chi) \xrightarrow{i_3} E/\alpha(\operatorname{Im} \chi) \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 0$$

where $\psi[e+\alpha(\operatorname{Im} \chi)] = \beta(e)$, Theorem A follows.

Using a similar notation, from the sequences

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \theta \xrightarrow{i_1} H \xrightarrow{\theta_1} \operatorname{Im} \theta \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} \theta \xrightarrow{i_2} H \xrightarrow{\pi} H/\operatorname{Im} \theta \longrightarrow 0$$

there follows dually

Theorem B. *Let x denote the element of* Ext(H, G) *determined by the exact sequence*

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 0;$$

let $\bar{\theta}$ denote the endomorphism of Ext (H, G) *induced by an endomorphism $\bar{\theta}$ of H. Then $x \in \operatorname{Im} \bar{\theta}$ if and only if $\alpha(G)$ is a direct summand of β^{-1}*(Ker θ).

We first obtained Theorem B by using [2, Theorem 1. 2′] and standard properties of divisible groups to directly dualize the proof given in [1] for [1, Theorem 62. 4]. Professor R. S. Pierce, University of Washington, gave the above elegant homological proof of Theorem B; our proof of Theorem A, in turn, is the dual of his argument.

The author would like to thank Professor R. A. Beaumont, University of Washington, for his encouragement in the preparation of this note.

References

[1] L. Fuchs, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).
[2] S. MacLane, Duality for groups, *Bulletin Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 485–516.

(Received September 27, 1962)

Bibliographie

Lamberto Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 16), VIII + 271 pages, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

The qualitative theory of differential equations has made an immense progress since the pioneering papers of STURM. This progress was achieved mainly in the last decades. Accounts of these results given in books were only rather sketchy, or one-sided. Thus, the present book of CESARI fills a serious gap by giving a fairly complete survey of the subject matter, pointing out the different viewpoints, the main underlying ideas, and the problems of the theory. There is added a highly valuable bibliography — on 70 pages (!). The style of the book is very concise, the typical proofs are given mostly in detail and the reader is referred to the original papers only for the complicated or longer proofs. The emphasis is laid on the general theorems. Some traditional topics such as STURM's theorems of comparison are omitted. A particular merit of the book is that it makes fully clear the interrelations of the numerous notions occurring in the theory and so one is able to compare the different results as to their dependence or independence. The conditions which are supposed on the coefficients are of very various character, e. g. boundedness, convergence to 0, $L^2(0, \infty)$ integrability, bounded variation. Accordingly, the results are also of various kinds, such as: boundedness, stability in some sense, or asymptotic behavior of the solution, etc. It is surprising, how many different kinds of stability are considered; they are all useful because they express some "good" property of the solution. One shows on examples that stability, boundedness are not properties invariant with respect to transformations of the system of coordinates. The oscillation, boundedness, L^2, etc. properties of the solutions of homogeneous linear differential equations of second order are dealt with in a separate paragraph. Besides the theorems obtained by the second method of LJAPUNOFF one gives a thorough account also of the so-called inverse problem. Further paragraphs deal — very extensively — with the problems of existence and approximation of periodic solutions, by analytic and analytico-topological methods, including the Poincaré — Bendixson theory and its application to the Liénard equation. The last paragraph deals with asymptotic expansions on the basis of FUCHS' theory, equations containing large parameters, the WKB method, LANGER's turning point theory, the results of WASOW concerning singular perturbation, etc.

I. Bihari (Budapest)

W. Hahn, Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Genzgebiete, neue Folge, Heft 22), VII + 142 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1959.

Die Stabilitätstheorie beschäftigt sich mit der Wirkung von kleinen, störenden Kräften auf das Verhalten mechanischer Systeme. Diese Kräfte, die momentan oder stetig wirken können, sind nicht genau bekannt, nur ihre Größe kann abgeschätzt werden. In den Untersuchungen der mechanischen Probleme ist natürlich von großer Bedeutung zu wissen, inwieweit man die Einflüsse dieser störenden Kräfte außer Acht lassen darf. Mit Fragen dieser Art haben sich u. a. schon LAGRANGE, JOUKOVSKY und POINCARÉ beschäftigt, die erste exakte Definition des Begriffes der Stabilität stammt aber von LJAPUNOV, dessen Werk 1892 erschien. LJAPUNOV wandte seine Resultate besonders auf Probleme der Theoretischen Mechanik an. Seine Methode und seine Ergebnisse fanden nur wenig Anklang, bis vor etwa 30 Jahren sowjetische Mathematiker die sog. „zweite Methode" von LJAPUNOV bei verschiedenen technischen Problemen, insbesondere bei mechanischen und elektrischen Schwingungen erfolgreich angewandt haben. Seitdem, wie es aus der wachsenden Anzahl der Veröffentlichungen zu ersehen ist, wurde die Theorie weitgehend ausgedehnt. Man kann den vorliegenden

Bericht über diese Untersuchungen umsomehr begrüßen, als fast alle Veröffentlichungen der sowjetischen Mathematiker auf Russisch und meistens in schwer zugänglichen Zeitschriften erschienen.

Im ersten Kapitel sind die Grundbegriffe dargelegt. Mit Hilfe der Vektor-Bezeichnung kann man den Ljapunovschen Begriff der Stabilität folgendermaßen angeben: Sei gegeben die Differentialgleichung $(*) \colon \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, wo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ eine stetige Funktion mit $\mathbf{f}(0, t) = \mathbf{0}$ und mit solchen Eigenschaften ist, daß die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und ihre stetige Abhängigkeit von den Anfangsgrößen gesichert ist. Die triviale Lösung nennt man nach LJAPUNOV stabil, wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart finden kann, daß aus $|\mathbf{x}_0| < \delta$ die Ungleichung $|\mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| < \varepsilon$ folgt, wobei $\mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ diejenige, wohlbestimmte Lösung ist, die für $t = t_0$ den Anfangswert $\mathbf{x}_0$ annimmt. Gibt es ein $\delta > 0$ sogar derart, daß für $|\mathbf{x}_0| < \delta$ auch $\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = 0$ folgt, so heißt die triviale Lösung asymptotisch stabil.

Die Ljapunovsche sog. „zweite Methode" ermöglicht, Bedingungen über die Stabilität der trivialen Lösung ohne eine explizite Kenntnis der Lösungen, also allein unter Benutzung der Differentialgleichung zu finden. Sie benutzt dazu geeignete Funktionen, die meist als Ljapunovsche Funktionen bezeichnet werden.

Im zweiten Kapitel sind die Hauptsätze über die Stabilität bewiesen. Zwei von LJAPUNOV stammende charakteristische Grundsätze: 1. Läßt sich eine positiv definite Funktion $v(\mathbf{x}, t)$ so angeben, daß ihre, für die Differentialgleichung $(*)$ gebildete Ableitung, d. h. $\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(\mathbf{x}, t) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v}{\partial t}$ nicht positiv ist, so ist die triviale Lösung stabil. 2. Läßt sich eine positiv definite, abnehmende Funktion derart angeben, daß ihre für $(*)$ gebildete Ableitung negativ definit ist, so ist die triviale Lösung asymptotisch stabil. Wie man schon auch aus diesen Sätzen ersehen kann, spielen in dieser Methode die Funktionen $v(\mathbf{x}, t)$, die sogenannten Ljapunovschen Funktionen, eine zentrale Rolle.

Im dritten Kapitel findet man Anwendungen auf konkrete Probleme, z. B. auf das Ajzermansche Problem, welches die Bewegungsgleichungen eines automatischen Regelsystems mit einem einzigen nichtlinearen Übertragungsglied betrefft.

Die Titel der folgenden Kapitel: Die Umkehrungen der Hauptsätze, Ljapunovsche Funktionen mit bestimmten Wachstumsverhalten, Die Empfindlichkeit des Stabilitätsverhaltens gegen Störungen. Die kritischen Fällen, Verallgemeinerungen des Stabilitätsbegriffs. Es wird gezeigt, daß sich die zweite Ljapunovsche Methode nicht nur zur Behandlung von Differentialgleichungen eignet, sondern man mit ihrer Hilfe eine allgemeinere Stabilitätstheorie aufbauen kann.

Ein sorgfältig zusammengestelltes Literaturverzeichnis ergänzt diesen wertvollen Bericht, welches die bis 1957 erschienene Literatur erfaßt.

L. Pintér (Szeged)

George Springer, Introduction to Riemann Surfaces, VIII + 307 pages, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1957.

This book gives an excellent introduction to the theory of Riemann surfaces. The level of prerequisits has been kept remarkably low: most parts of the book are accessible for a reader who has mastered advanced calculus and who knows the elements of group theory as well as the elements of the theory of a complex variable. Beyond this, the Lebesgue theory is used (though a reader unfamiliar with it will actually miss only a certain completeness-argument, for which — as an additional help — FATOU's lemma is stated), and also VITALI's convergence theorem (the statement of which the reviewer would have liked). The basic concepts of topology and of Hilbert space theory are developped within the book, and in such a way that the respective chapters might serve as an introduction to theses fields.

Chapter 1 (Introduction) takes a phenomenological view — a view which unfortunately is taken too seldom nowadays in mathematical texts — of the things to be encountered. With Chapter 2 (General Topology) begins the rigorous treatment. Starting with point-set topology, the concept of manifold is introduced which leads to the definition of an abstract Riemann surface as a two-dimensional manifold with an analytic structure. In Chapter 3 (Riemann surface of an Analytic Function) it is seen that Weierstrass' Analytisches Gebilde leads to an abstract Riemann surface. Chapter 4 (Covering Manifolds) relates the Analytische Gebilde to a covering manifold of the z-sphere, itself a particular Riemann surface; further the monodromy theorem, the fundamental group of a two-dimensional manifold, and the group of covering transformations of a covering manifold are discussed. Chapter 5 (Combinatorial Topology) gives an account of the topology of surfaces, and in particular of compact orientable surfaces. Here the concept of homology and its relation to homotopy comes in.

Chapter 6 (Differentials and Integrals) defines the zero-th, first and second order differentials on a Riemann surface, it develops the exterior differential calculus and introduces the important class of harmonic and of analytic differentials. In Chapter 7 (The Hilbert Space of Differentials) the Hilbert space of first order differentials ist treated together with the orthogonal decomposition of such a differential into its closed, co-closed and harmonic components; it also proves WEYL's lemma. This leads, in Chapter 8 (Existence of Harmonic and Analytic Differentials), to various existence and uniqueness theorems for harmonic differentials with singularities and for Abelian differentials. Chapter 9 (Uniformization) proves the parallel-slit mapping theorem for a Riemann surface which is schlichtartig, and the triangulability of any Riemann surface. It also studies the universal covering surface and thus the mapping of a Riemann surface onto itself. The final Chapter 10 (Compact Riemann Surfaces) gives a concise and comprehensive treatment of the classical case of compact Riemann surfaces with their meromorphic functions and Abelian differentials.

To each chapter a set of well selected exercises is added. Particularly noteworthy are the exercises to the chapters 7 and 8: here the reader is lead into cohomology theory.

Finally, a few critical remarks may be in order. Occasionally, there are inaccuracies in the presentation (PRÜFER's example of an uncountable manifold, p. 56; the statement of Theorem 2—3, p. 64); sometimes proofs might be simplified (Theorem 5—10, p. 64), and a number of misprints may cause slight trouble.

F. Huckemann (Giessen)

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **II, Lattice theory,** VIII + 208 pages, American Mathematical Society, Providence, 1961.

This volume contains the papers presented at the Symposium on Partially Ordered Sets and Lattice Theory held in conjunction with the Monterey meeting of the American Mathematical Society in April 1959. It consists of four parts, namely: I. Lattice structure theory, II. Complemented modular lattices, III. Boolean algebras, IV. Applications of lattice theory.

The papers contained in this book give, on the one hand, detailed expositions concerning the present state of some important chapters of lattice theory; moreover they treat many recent results and unsolved problems, too. In what follows, we sketch the subject of these papers, one by one.

Part I. The first paper, due to R. P. DILWORTH, is devoted to a description of the relationship between structure and decomposition theorems and contains a discussion of some problems in this area of lattice theory. PH. M. WHITMAN discusses the state of word problem for free (especially, for free modular or distributive) lattices. J. HARTMANIS outlines the lattice theory of generalized partitions. This theory throws new light on some recently solved embedding problems as well as on some important unsolved problems. R. A. DEAN gives some contributions to the characterization of the sublattices of free lattices. By means of prime ideals, C. C. CHANG and A. HORN completely characterize the generalized Post algebras among the distributive lattices.

Part II. I. HALPERIN comments the work of J. VON NEUMANN on continuous geometry and gives many references to the related works also of other mathematicians. The B. JÓNSSON's paper is concerned with the following problem, also investigated by VON NEUMANN: Given a complemented modular lattice, under what conditions is it isomorphic to the lattice of all principal left ideals of a (suitably chosen) regular ring? K. D. FRYER discusses, among others, conditions which must be imposed on the normalized frame of a complemented modular lattice in order that the lattice may be coordinatized. J. E. MCLAUGHLIN establishes, firstly, some simple properties of the normal completion of a complemented modular point lattice and then gives a representation theorem for lattices having these properties.

Part III. L. HENKIK and A. TARSKI discuss the basic notions of the theory of cylindric algebras and give an account of the main results so far obtained in this theory. R. P. HALMOS gives the description of injectivity and projectivity in the category of Boolean algebras resp. complete Boolean algebras. C. C. CHANG presents a survey of some known results for the cardinal and ordinal multiplication of relation types. (The results and problems presented here are partly interesting generalizations of known results on partially ordering relations.) R. S. PEIRCE examines some properties of a particular class of complete Boolen algebras. PH. DWINGER defines the α-complete retracts of an α-complete Boolean algebra and establishes necessary and sufficient conditions in order that an α-complete Boolean algebra be an α-complete retract of an other one, finally he treats two interesting special cases.

Part IV. G. BIRKHOFF's paper is devoted to the applications of lattice theory on quantum logics, averaging operators, ergodic theory, etc. M. HALL, JR., considers the lattice N(G) of normal subgroups of a group G, and establishes some relationship between the properties of N(G) and of G. In connection with certain known results, L. W. ANDERSON sets some problems concerning locally compact topological lattices. Finally, F. W. ANDERSON (in collaboratoin with R. L. BLAIR) considers, among others, the following representation problem: For a given chain, characterize those lattices which are subdirect unions of copies of this chain. Also, he generalizes the STONE's representation theorems for Boolean algebras.

This book presupposes the knowledge of the classical concepts and results of the lattice theory. But the reader, familiar with these facts, can obtain a good information about the most important areas of recent investigàtions in lattice theory.

G. Szász (Szeged)

G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie, 256 Seiten, Budapest, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1962.

Die mathematische Literatur gewinnt mit diesem Buch ein Werk, welches in erster Reihe einen einführenden Charakter hat, gleichzeitig aber auch weitere Perspektiven der Verbandstheorie eröffnet. Es ist die Übersetzung des 1959 in ungarischer Sprache erschienenen Originals mit einer ergänzten Bibliographie. Es umfaßt ein ziemlich ausgedehntes theoretisches Material und erläutert dies auch mit Hilfe von Beispielen, Hinweisungen und Übungsaufgaben. Seinem Ziel entsprechend gibt das Buch eine ausgezeichnete Einführung in die Verbandstheorie, informiert von den wichtigsten Begriffen und Methoden, weiterhin von der Anwendbarkeit der Verbandstheorie in verschiedenenen Gebieten der Mathematik. Wegen der erwähnten Eigenschaften wird das vorliegende Buch gewiß ein ausgedehntes Interesse finden.

J. Szendrei (Szeged)

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

N. Bourbaki, Éléments d'histoire des mathématiques (Collection Histoire de la pensée, IV), 276 pages, Paris, Hermann, 1960. — 18 NF

J. Favard, Cours d'analyse de l'Ecole Polytéchnique. Tome I. **Introduction. Opérations,** VII + 675 pages; Tome II. **Représentations. Fonctions analytiques,** VI + 578 pages; Tome III. **Théorie des équations.** Fasc. I. **Équations différentielles,** VI + 294 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1960, 1962. — 90 NF, 45 NF.

C. Ferrari—F. G. Tricomi, Aerodinamica transonica (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 10), XVI + 632 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1962. — L. 9000

M. Godefroy, Mathématiques générales. Synthèse élémentaire, VIII + 187 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1961. — 16 NF

A. Grzegorczyk, Fonctions récursives (Collection de logique mathématique, XVII), 100 pages, Paris—Louvain, Gauthier-Villars—Nauwelaerts, 1961. — 18 NF

E. J. Gumbel, Statistics of extremes, XXII + 375 pages, New York, Columbia University Press, 1960. — $ 15,—

W. Haack, Darstellende Geometrie II. Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kotierte Projektionen (Sammlung Göschen, Bd. 143), 129 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1962. — DM 3,80

G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen (Sammlung Göschen, Bd. 1003), 6. neubearbeitete und erw. Aufl., 128 Seiten, — DM 3,60
Partielle Differentialgleichungen (Sammlung Göschen, Bd. 920), 4. durchges. Aufl., 128 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1960. — DM 3,60

M. Hukuhara—T. Kimura—Mme T. Matuda, Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe (Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 7), VIII + 155 pages, Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1961.

E. Kamke, Mengenlehre (Sammlung Göschen, Bd. 999/999 a), 4. verb. Aufl., 194 Seiten, Berlin, Walter de Gruyter, 1962. — DM 5,80

A. Kaufmann—R. Douriaux, Les fonctions de la variable complexe, VIII + 427 pages, Paris, Eyrolles — Gauthier-Villars, 1962.

J. L. Lions, Equations différentielles opérationnelles (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 111), X + 292 Seiten, Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1961. — DM 64,—

A. Liulevicius, The factorization of cyclic reduced powers by secondary cohomology operations (Memoirs of the American Mathematical Society, Nr. 42), 112 pages, Providence, American Mathematical Society, 1962. — $ 1,90

P. Medgyessy, Decomposition of superpositions of distribution functions, 227 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1961.

Premier congrès de l'Association Française de Calcul, Grenoble, 14—16 Septembre 1960, 488 pages, Paris, Gauthier-Villars, 1961.

H. S. Ruse—A. G. Walker—T. J. Willmore, Harmonic spaces (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Mathematiche, 8), XII + 240 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961. — L. 3500

G. Scorza Dragoni, Elemente di analisi matematica. Vol. I. **Elementi di algebra,** VIII + 584 pages; Vol. II. **La continuità e la differenziabilità,** VI + 692 pages; Vol. III. **La teoria elementare dell'integrazione,** VI + 584 pages, Padova, CEDAM, 1961—62. — L. 5000 + 6000 + 5000

G. Shimura—Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory (Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 6), X + 159 pages, Tokyo, The Mathematical Society of Japan, 1961. — $ 3,20

S. L. Sobolev, Sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Monografie Matematiche, 9), VIII + 144 pages, Roma, Edizioni Cremonese, 1961. — L. 2000

G. Szász, Einführung in die Verbandstheorie, 255 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1962.

L. Takács, Introduction to the theory of queues (University Texts in the Mathematical Sciences), X + 268 pages, New York, Oxford University Press, 1962.

H. Wussing, Mathematik in der Antike. Mathematik in der Periode der Sklavenhaltergesellschaft, VIII + 245 Seiten, Leipzig, Teubner, 1962. — DM 18,—

Mémorial des sciences mathématiques, fascicules 150, 152, Paris, Gauthier-Villars, 1961—62.
150. F. POLLACZEK, Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente, 115 pages.
152. R. SAINT-GUILHEM, Les principes de l'analyse dimensionnelle. Invariance des relations vectorielles dans certains groupes d'affinités, 79 pages.

SZEGED
1963 : 979

Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (Budapest)

und

B. G. Teubner Verlagsgesellschaft (Leipzig)

Gábor Szász

EINFÜHRUNG IN DIE VERBANDSTHEORIE

Budapest 1962. — 254 Seiten — 32 figuren im Text — Format 17×24 cm — Ganzleinen DM 34. —

Die Verbandstheorie ist erst in neuerer Zeit in den Vordergrund des allgemeinen Interesses gerückt. Ungeachtet dessen, daß ihre Entwicklung erst vor einem Vierteljahrhundert in größerem Ausmaß begann, zählt sie heute bereits zu den wichtigsten Kapiteln der abstrakten Algebra, obwohl sie bisher viel weniger wirklich tiefe Ergebnisse aufgewiesen hat als etwa die Gruppentheorie, die Körpertheorie oder die Theorie der Ringe. Die Bedeutung der Verbandstheorie liegt vor allem darin, daß ihre Begriffsbildungen und Methoden auf zahlreichen Gebieten der Mathematik und der theoretischen Physik Anwendung finden.

Das vorliegende Buch wendet sich vor allem an Leser, die sich allgemein über die Verbandstheorie orientieren wollen oder diese bei ihren anderwärtigen mathematischen Forschungen zu verwerten gedenken. Dementsprechend war der Verfasser bestrebt, einerseits die wichtigsten Begriffe und die am häufigsten verwendeten einfachen Methoden der Verbandstheorie darzulegen und andererseits, in dem durch den Umfang des Buches gesetzten Rahmen, die Beziehungen der Verbandstheorie zu anderen Zweigen der Mathematik aufzuzeigen. Diesem Ziele dienen insbesondere auch die zur Erläuterung der auftretenden Begriffsbildungen aus verschiedenen Gebieten der Mathematik herangezogenen Beispiele.

Beim Abfassen des Buches dachte aber der Verfasser auch an diejenigen, die die Durcharbeitung des Buches als ersten Schritt auf dem Wege zu selbstständigen verbandstheoretischen Forschungen ansehen wollen. Für diese Leser weist er auf zahlreiche neuere Ergebnisse hin, die sich zwar inhaltlich dem Gegenstand des Buches anschließen, dabei aber im Rahmen eines Einführungswerkes nicht ausführlich behandelt werden können.

Am Schluß der einzelnen Kapitel finden sich Übungsaufgaben; ihre Lösung soll dem Leser helfen, sich eine gewisse Fertigkeit in der Anwendung der Theorie anzueignen. Zur Lösung der schwierigeren Übungsaufgaben sind Anleitungen am Ende des Buches angegeben.

INHALT: Teilweise geordnete Mengen — Über Verbände im Allgemeinen — Vollständige Verbände — Distributive und modulare Verbände — Modulare Verbände mit speziellen Eigenschaften — Boolesche Algebren — Halbmodulare Verbände — Ideale in Verbänden — Kongruenzrelation — Übungsaufgaben — Literaturverzeichnis — Sachverzeichnis.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM
SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

Prix d'abonnement pour l'étranger $ 8.50. On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des libres et journaux „Kultúra" (Budapest, I. Fő utca 32).

INDEX: 26 024

62-3335 Szegedi Nyomda Vállalat
Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felel: Vágvölgyi Tibor igazgató

Felelős szerkesztő: Szőkefalvi-Nagy Béla
Műszaki vezető: Gortvai Tivadar
Műszaki szerkesztő: Vízkelety József
A kézirat nyomdába érkezett: 1962. szeptember hó

Megjelenés: 1962. december
Példányszám: 790. Terjedelem: 16 (A/5) ív
Készült monószedéssel, íves magasnyomással az MSZ 5601-54 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint

Azonossági szám: 69103